目　　录

绪　论

早期的量子光学现象，诸如黑体辐射、光电效应、康普顿-吴有训散射、喇曼散射、光的强度起伏等等，对于人们认识光的量子属性和光与物质之间相互作用的规律等方面，起过重要作用。

进入20世纪50年代以后，人们对原子自发辐射机制进行了深入的探索，结果先后发现了两类原子合作发光现象，这就是熟知的狄克(R. H. Dicke)超辐射和超荧光，它们的光强度与发光的原子数平方成正比，因此引起人们的重视。由于共振荧光谱线出现交流斯塔克(AC STARK)效应以及共振荧光的光子统计性质所表现出的特点，引起研究共振荧光的兴趣。光学双稳态的发现，推动研究各类光学双稳态系统，迄今对光学双稳态的研究已相当深入，有趣的是光学双稳态回线的下支，来自原子合作效应。随着对自然界中各类现象的混沌的研究的展开，关于光学领域里的混沌问题的研究相当广泛，从激光器，光学双稳态系统到各类非线性光学现象，对它们的不稳定性和混沌的研究，进展甚快。孤立波现象在自然中是较比普遍的，在光波段，对光学孤子的产生和性质的研究，因与光通讯工程技术有着密切联系，而引起重视。光学混沌和光学孤子属于光学系统的非线性动力学问题。关于光学压缩态以及与光子聚束，光子反聚束效应相联系的光子统计分布规律，目前正在进行大量的实验研究和理论研究。近年来开展的原状态相干和无粒子数反转光放大的问题研究，已成为量子光学的重要领域。以上所列举的狄克超辐射、超荧光、共振荧光、光学双稳态、光学混沌、光学孤子、光学压缩态、光子统计分布律、原子状态相干和无粒子数反转光放大等，大致构成了现今较比公认的量子光学的研究内

容。国内也有称此为近代量子光学的，这大概是为了区分早期的量子光学效应。

本书以上述诸现象作为内容，系统地研究它们各自所遵循的基本规律和基本方程组，并同已有的实验事实紧密联系，阐述它们的特性。由于还在不断出现新的实验，因此本书侧重于基础方面的讨论。

从原则上看，上述诸现象主要涉及到原子的各类发光机制问题，不同的发光机制发出的光子的统计性质问题，光场的状态及其控制问题，光与物质相互作用中的非线性动力学问题以及原子状态相干的介质的光学特性问题。从理论上来看，已经建立起来了一套描写这些现象的半经典理论和全量子理论。从实验上来看，激光的出现，为研究大量的量子光学现象，提供了强有力的手段。

量子光学现象有着广阔的应用前景，例如：光学双稳态系统可能应用于光计算技术和光学计算机，光学混沌可能应用于信息科学技术，超荧光的研究，对于在一些波段上相干辐射的产生，提供一条可能的途径，光学压缩态的研究，在测量技术等方面将产生重大影响，光学孤子的研究，对光通讯的发展，将起重要推动作用，原子状态相干和无粒子数反转光放大问题的研究，将有助于解决激光科学技术中的一些问题，等等，可以看出，本书所研究的对象，将成为一些新的高技术的生长点。

第一章　光场中的二能级原子

本章讨论量子光学中常用的一些物理概念。首先从经典观点讨论光场与二能级原子相互作用的规律。然后建立在光场中的二能级原子的波函数方程和密度矩阵方程以及麦克斯韦-布洛赫方程，在引入赝自旋算符描写二能级原子的电偶极矩算符之后，建立光场中二能级原子的光学布洛赫方程，并举例说明它的应用，这些半经典方程在量子光学中有着广泛的应用。最后讨论二能级原子与光场相互作用的全量子理论基础。

§1-1　引　　言

研究量子光学现象，一般总是归结为研究光场与原子相互作用问题。在很多场合下，可以看作是二能级原子与光场的相互作用，实验表明，这种处理往往是正确的。

我们首先从经典的观点来讨论，即认为原子是最简单的带电系统——电偶极子，认为光场是经典电磁场，在经典电磁学和经典力学范围内研究它们之间的相互作用规律，将会看到，这种方法简单、直观，在一系列情形下，能够给出与实验相符合的结果。

半经典理论认为原子的运动服从量子力学规律，而光场则是经典的电磁场，它的运动服从经典电动力学规律。将会看到，研究二能级原子在光场中的运动，由于引入赝自旋算符描写二能级原子的电偶极矩算符，为一系列量子光学现象的理论处理，带来很大的方便，同时得到具有深刻物理意义的结果。引用赝自旋算符讨论二能级原子与光场相互作用问题，最后可以建立光学布洛赫方程。

同样，如用波函数或者密度矩阵描写二能级原子的运动状态，同时认为光场为经典电磁场，则可得到麦克斯韦-布洛赫方程。实践表明，这些方程在半经典理论中是经常用到的基本方程。

量子光学中的全量子理论，认为二能级原子服从量子力学规律，使用上升和下降算符描写二能级原子的电偶极矩算符；而光场是经过量子化的电磁场，按这种观点建立的简斯-库明斯(Janes-Cummings)模型有着相当深刻的物理内容，且有待发掘。

本章将系统讨论上述量子光学中的经典理论、半经典理论和量子理论中的基本概念，为研究以后各章具体的量子光学现象和有关理论，奠定一定的基础。

关于二能级原子的处理方法和有关的概念，容易推广到多能级原子体系，因此这章讨论的内容，对于研究多能级原子与光场相互作用问题，也是相当基本的。

§1-2　原子与光场相互作用的经典理论

我们首先从经典观点出发，讨论一个二能级原子与光场相互作用时，特别是在共振作用时所服从的方程组。

从经典观点研究光场与物质的相互作用过程，首先是把光场视为服从经典电动力学规律的电磁场，它的运动服从麦克斯韦方程组；把原子体系看作为线性电偶极子或者非线性电偶极子。因此，光与原子的相互作用，归结为光的电磁场与原子的电偶极子之间的相互作用。这种经典的处理方法，有其成功之处，例如关于光的色散、吸收、散射等现象，都给出了与量子力学处理方法相一致的结果，所以在研究一些光学问题时，包括激光、非线性光学、量子光学中的一些问题，仍被人们所采用。

我们把一个二能级原子看作为经典的线性电偶极子，二能级原子在能量状态之间跃迁辐射光或吸收光的频率与线性电偶极子

的固有振荡频率 ω_0 相应。首先讨论在没有光场作用，线性电偶极子作衰减振荡情形。设线性电偶极子沿 z 轴作振动运动，根据经典电动力学，它的运动方程为

$$m\ddot{z} = -kz + Fs \tag{1-2-1}$$

式中 m 为电偶极子的质量，k 为弹性恢复系数，Fs 为线性电偶极子的自作用力

$$Fs = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{z} \tag{1-2-2}$$

式中 e 为电子电荷，ε_0 为真空中的介电系数，c 为真空中光速。如取简谐振动近似，则有

$$\ddot{z} \simeq -\omega_0^2 z \tag{1-2-3}$$

式中的 ω_0 为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1-2-4}$$

如令

$$\gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3} \tag{1-2-5}$$

则(1-2-1)式为

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z + \gamma\dot{z} = 0 \tag{1-2-6}$$

容易求出上式的解为

$$z = z_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t} \tag{1-2-7}$$

式中 z_0 是 $t=0$ 时刻线性电偶极子的坐标。(1-2-7)式表明线性电偶极子在作衰减振荡，衰减速率为 $\gamma/2$，衰减时间为 $2/\gamma$。作衰减振荡时的能量变化为

$$W = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 z^2$$

将(1-2-7)式代入，得到

$$W = W_0 e^{-\gamma t} \tag{1-2-8}$$

式中 W_0 为 $t=0$ 时线性电偶极子的能量，其衰减速率为 γ，寿命时

间为

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \tag{1-2-9}$$

对于可见光，由(1-2-5)式得到 $1/\gamma \sim 0.1\times10^{-6}\mathrm{s}$，所以，$\gamma \ll \omega_0$，表明原子在缓慢地损耗能量，这是处理光与原子相互作用问题时，取缓变近似的根据。

现在讨论有光场与线性电偶极子相互作用情形。设光场的频率 ω 非常接近于电偶极子的固有振荡频率 ω_0，即研究共振作用情形。设光的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 2\boldsymbol{E}_a\cos\omega t \tag{1-2-10}$$

在光的电场作用下，电偶极子的运动方程为

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z + \gamma\dot{z} = \frac{e}{m}E(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-11}$$

可以将上式简化为两个一阶微分方程，为此设

$$z = z_0[\xi(t)\cos\omega t - \eta(t)\sin\omega t] \tag{1-2-12}$$

将(1-2-12)式代入(1-2-11)式，当 $\omega\approx\omega_0$ 时，原子能量的变化是缓慢的，可取 $\xi(t)$和 $\eta(t)$的缓变近似：

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} \ll \omega^2|\xi|, \quad \dot{\xi} \ll \omega|\xi| \\ \ddot{\eta} \ll \omega^2|\eta|, \quad \dot{\eta} \ll \omega|\eta| \end{aligned} \tag{1-2-13}$$

由(1-2-12)式得到

$$\begin{aligned} \dot{z} =& z_0\dot{\xi}(t)\cos\omega t - z_0\xi(t)\omega\sin\omega t - z_0\dot{\eta}(t)\sin\omega t \\ & - z_0\eta(t)\omega\cos\omega t \end{aligned} \tag{1-2-14}$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} =& z_0\ddot{\xi}(t)\cos\omega t - z_0\dot{\xi}(t)\omega\sin\omega t - z_0\dot{\xi}(t)\omega\sin\omega t \\ & - z_0\xi(t)\omega^2\cos\omega t - z_0\ddot{\eta}(t)\sin\omega t - z_0\dot{\eta}(t)\omega\cos\omega t \\ & - z_0\dot{\eta}(t)\omega\cos\omega t + z_0\eta(t)\omega^2\sin\omega t \end{aligned} \tag{1-2-15}$$

将它们代入(1-2-11)式后，首先取等式两端 $\cos\omega t$ 项的系数使之相等，得到

$$z_0\ddot{\xi}(t) - z_0\xi(t)\omega^2 - z_0\dot{\eta}(t)\omega - z_0\dot{\eta}(t)\omega + \omega_0^2 z_0\xi(t)$$

$$+ \gamma z_0\xi(t) - \gamma z_0\eta(t)\omega = 2\frac{e}{m}E_a \tag{1-2-16}$$

根据(1-2-13)式，取缓变近似后得到关于 $\eta(t)$ 的方程为：

$$\dot{\eta}(t) = -\frac{\gamma}{2}\eta(t) + \frac{\gamma}{2\omega}\xi + \frac{1}{2\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)\xi - \frac{e}{m\omega z_0}E_a \tag{1-2-17}$$

现在用 T 代替上式中关于振幅的总衰减时间 $2/\gamma$，又考虑到 $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \simeq 2\omega(\omega_0 - \omega)$；因为 $\gamma/2\omega \ll 1$，忽略 $\gamma\xi(t)/2\omega$ 项，则上式变为

$$\dot{\eta}(t) = \xi(t)\delta - \frac{\eta(t)}{T} - \alpha_a E_a \tag{1-2-18}$$

式中

$$\delta = \omega_0 - \omega \tag{1-2-19}$$

$$\alpha_a = \frac{e}{m\omega z_0} \tag{1-2-20}$$

同理，将(1-2-14)和(1-2-15)式代入(1-2-12)式，比较等式两端 $\sin\omega t$ 项的系数，得到

$$\begin{aligned}&- z_0\xi(t)\omega - z_0\xi(t)\omega - z_0\ddot{\eta}(t) + z_0\eta(t)\omega^2 \\ &- \omega_0^2 z_0\eta(t) - \gamma z_0\xi(t)\omega - \gamma z_0\dot{\eta}(t) = 0\end{aligned} \tag{1-2-21}$$

取缓变近似后得到

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{1}{2\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)\eta(t) - \frac{\gamma}{2}\xi(t) - \frac{\gamma}{2\omega}\dot{\eta}(t) \tag{1-2-22}$$

采用与上面相同的处理，最后得到 $\xi(t)$ 的方程为

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{1}{T}\xi(t) - \eta(t)\delta \tag{1-2-23}$$

总结以上，我们得到

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= -\frac{1}{T}\xi(t) - \eta(t)\delta \\ \dot{\eta}(t) &= -\frac{1}{T}\eta(t) + \xi(t)\delta - \alpha_a E_a\end{aligned} \tag{1-2-24}$$

方程组(1-2-24)式是从经典观点得到的光与原子共振作用时，原子的运动方程，它是讨论共振光学现象的经典理论基础。在

本章后面的讨论中将会看到，从量子力学观点研究光场与二能级原子相互作用时，也将得到与这两个方程相类似的方程组。

当光的电场振幅 E_c 为常数时，方程组(1-2-24)式有非常简单的解。这时的问题称为经典拉比(Rabi)问题，这是因为拉比首先在量子力学那里求解了这类问题，并将其用于磁共振现象研究中。

借助(1-2-24)式和关于光的电场的传播方程，同样可以研究描写光脉冲传播的面积定理以及光脉冲的传播规律。这方面问题将在第七章讨论。同样，借助(1-2-24)式也可以讨论光学自由感应衰减等现象。

最后我们来讨论 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的物理意义。设所讨论的介质由 N 个二能级原子组成，则它在光场作用下形成的宏观电极化强度，由每个原子的电偶极矩决定。考虑到(1-2-12)式和光谱线的线型函数 $g(\delta')$，按定义，介质的宏观电极化强度 $P(t)$ 为

$$P(t) = N_e z_0 \int \mathrm{Re}\{[\xi(\delta',t) + \mathrm{i}\eta(\delta',t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\} g(\delta')\mathrm{d}\delta' \tag{1-2-25}$$

可以看出，$\xi(t)$ 决定介质宏观电极化强度的实数部分，$\eta(t)$ 决定虚数部分。因此，$\xi(t)$ 表示色散，$\eta(t)$ 表示吸收(放大)。

§1-3 光场中二能级原子的波函数方程

现在讨论光与二能级原子相互作用的半经典理论基础。这里认为光场是经典电磁场，它的运动服从麦克斯韦方程组；认为二能级原子的运动服从量子力学规律，即服从薛定谔方程。光场对原子的作用，归结为对原子状态的微扰作用。在这一节将按这种模型，建立单个二能级原子的波函数方程。

现在首先讨论二能级原子模型问题。人们已经知道，在光场与原子相互作用的许多问题中，可以只考虑原子的两个能级，这当然

是有条件的。若原子的两个能级的能量差为

$$E_\alpha - E_\beta \approx \hbar\omega \tag{1-3-1}$$

上式中 ω 为光场的频率，对于二能级原子，则要求该原子的其它能级之间的能量差不与 $\hbar\omega$ 相接近；此外还要求从原子的其它能级向这两个能级跃迁，以及从这两个能级向其它能级跃迁的跃迁几率都非常小，如图 1-3-1 所示。

现以钠原子为例，研究在什么条件下可以孤立为二能级的。由上述可知，这一方面要看能级间的间距，另一方面要看光场的频率范围，当它们之间相互作用时，应该没有第三个能级参加。钠原子有一系列的能级，图 1-3-2 表示钠原子的部分能级情况。图上列出 D_1 和 D_2 线相应的分裂能级。现在研究 D_1 和 D_2 谱线，D_1 线（$3^2P_{1/2}-3^2S_{1/2}$）的波长为 589.593nm，D_2 线（$3^2P_{3/2}-3^2S_{1/2}$）的波长为 588.99nm，二者相差 0.6nm，另方面，对于钠原子气体的光谱线，包括碰撞加宽等在内的均匀加宽 $\Delta\lambda\sim10^{-4}$nm，都普勒加宽 $\Delta\omega_D\approx10$GHz，它们都比 0.6nm 小，所以当外加光场与处于这两条谱线相应的能量状态的钠原子共振作用时，在能级上都不会发生重叠现象，与此相对应，当外加光场的脉冲持续时间达到亚皮秒时，钠原子仍可视为二能级原子。如果进一步考虑到由于钠原子核自旋引起的光谱的超精细结构时，再来讨论一下，在什么情况下钠原子可以看作为二能级的，例如对于 D_2 线的 $3^2P_{3/2}(F=2)\rightarrow3^2S_{1/2}(F=1)$，由图 1-3-2 可以看出，光场的作用应不影响 $3P_{3/2}(F=1)$ 或 $3^2S_{1/2}(F=2)$ 能级，它们的邻近能级不应参与。由图 1-3-2，$3^2P_{3/2}$的 $F=2$ 与 $F=1$ 之间的能级差为 35.5MHz，这是最邻近的。这样，外来的光脉冲持续时间应比 3×10^{-8}s 长，才能把 D_2 线的 $3^2P_{3/2}(F=2)\rightarrow3^2S_{1/2}(F=1)$，看作是二能级问题。由上述分析可以看出，二能级原子模型还与原子密度、光谱结构等等情况有关。



图 1-3-1

可见，只有对于具有量子化性质的系统，诸如原子或分子，才

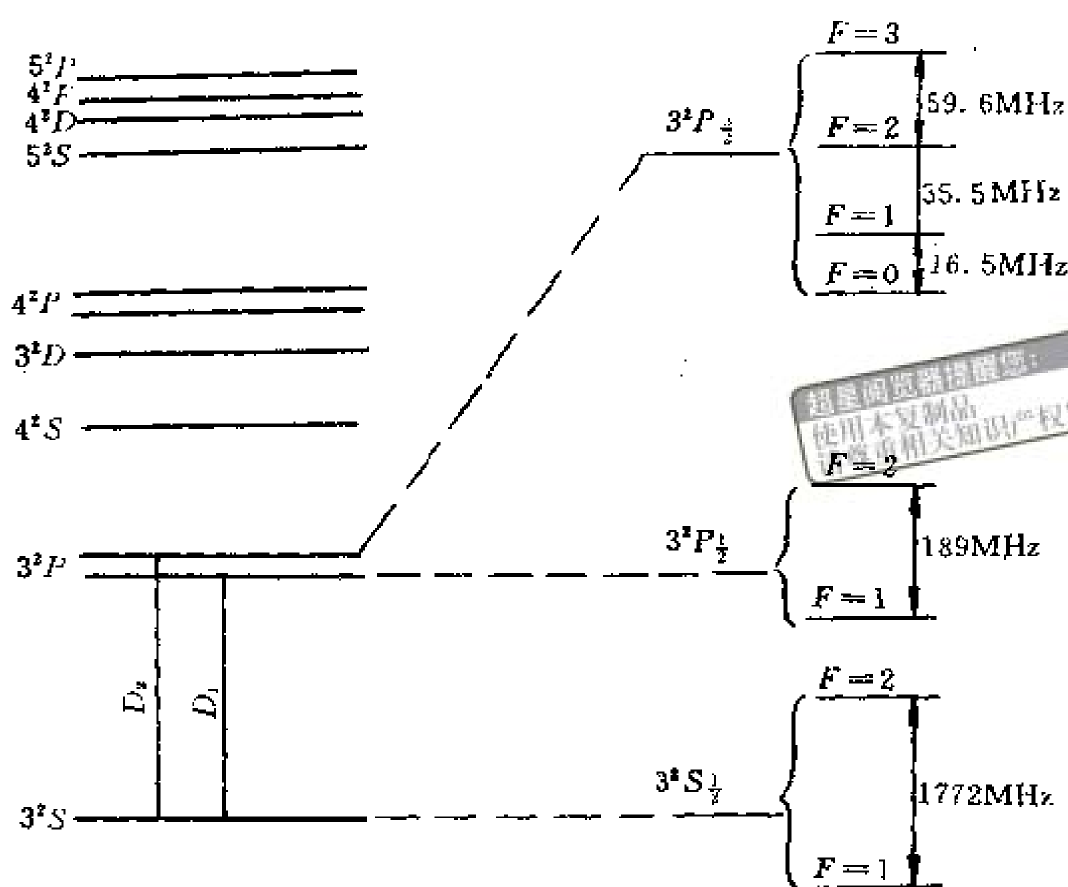


图 1-3-2 钠原子部分能级图

能引入理想的二能级模型。二能级原子只有一个对应的共振频率，这又恰与经典的简谐振子相类似。

现在讨论单个二能级原子在光场作用下的波函数运动方程。设光的电场强度为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，单个二能级原子的电偶极矩为 $\boldsymbol{\mu}$，在光频段，取电偶极近似，则光与原子组成的系统的哈密顿算符 $\hat{H}$ 为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' \tag{1-3-2}$$

上式中 $\hat{H}_0$ 为原子的哈密顿算符，相互作用哈密顿算符 $\hat{H}'$ 为

$$\hat{H}' = -\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{1-3-3}$$

设二能级原子的高能态 α 的衰减速率为 γ_α，低能态的衰减速率为 γ_β，相应的定态波函数分别为 $\phi_\alpha(q)$ 和 $\phi_\beta(q)$，能量分别为 E_α 和 E_β，则在光场作用下的二能级原子波函数为

$$\psi(q,t) = a_1\phi_\alpha(q)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_\alpha t}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_\alpha}{2}t} + a_2\phi_\beta(q)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_\beta t}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_\beta}{2}t} \tag{1-3-4}$$

若令

$$\alpha(t) = a_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_\alpha t} e^{-\frac{\gamma_\alpha}{2}t} \tag{1-3-5}$$

$$\beta(t) = a_2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_\beta t} e^{-\frac{\gamma_\beta}{2}t} \tag{1-3-6}$$

则(1-3-4)式可表示为

$$\psi(q,t) = \alpha(t)\phi_\alpha(q) + \beta(t)\phi_\beta(q) \tag{1-3-7}$$

波函数 $\psi(q,t)$满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = \hat{H}\psi(q,t) \tag{1-3-8}$$

将(1-3-2)(1-3-4)和(1-3-7)式代入，然后以 $\int \phi_\alpha^*(q)\mathrm{d}q$ 分别作用等式两端，则得到波函数 $\alpha(t)$的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) = -\left(\frac{i}{\hbar}E_\alpha + \frac{\gamma_\alpha}{2}\right)\alpha(t) - \frac{i}{\hbar}\beta(t)F(t) \tag{1-3-9}$$

上式中的 $F(t)$为

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \phi_\alpha^*(q)\hat{H}'\phi_\beta(q)\mathrm{d}q \\ &= \int \phi_\beta^*(q)\hat{H}'\phi_\alpha(q)\mathrm{d}q \end{aligned} \tag{1-3-10}$$

将(1-3-3)式代入，$F(t)$可表示为

$$F(t) = -\mu E \tag{1-3-11}$$

上式中

$$\mu = \int \phi_\alpha^*(q)\hat{\mu}\phi_\beta(q)\mathrm{d}q \tag{1-3-12}$$

同样，若将(1-3-2)(1-3-4)和(1-3-7)式代入(1-3-8)式，然后以 $\int \phi_\beta^*(q)\mathrm{d}q$ 分别作用等式两端，则得到波函数 $\beta(t)$的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta(t) = -\left(\frac{i}{\hbar}E_\beta + \frac{\gamma_\beta}{2}\right)\beta(t) - \frac{i}{\hbar}\alpha(t)F(t) \tag{1-3-13}$$

(1-3-9)和(1-3-13)式就是二能级原子的波函数方程，因为 $\alpha(t)$和 $\beta(t)$被确定后，由(1-3-7)式就可求出波函数 $\psi(q,t)$最后表示式。

使用(1-3-9)和(1-3-13)式还可以求出，在时刻 t 发现原子在

能级 α 的几率 $\alpha\alpha^*$ 和原子在能级 β 上的几率 $\beta\beta^*$ 的方程。这只须将 $\alpha(t)$ 的共轭复数 $\alpha^*(t)$ 左乘(1-3-9)式，然后减去用 $\alpha(t)$ 从右端乘以(13-9)式的共轭复数形式，经过简单运算，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha(t)\alpha^*(t)] = -\gamma_\alpha[\alpha(t)\alpha^*(t)] - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\alpha^*(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta^*(t)]F(t) \tag{1-3-14}$$

同理，由(1-3-13)式得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\beta(t)\beta^*(t)] = -\gamma_\beta\beta(t)\beta^*(t) + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\alpha^*(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta^*(t)]F(t) \tag{1-3-15}$$

由以上二式看出，为了求 $|\alpha(t)|^2$ 和 $|\beta(t)|^2$，还要建立 $\alpha(t)\beta^*(t)$ 和 $\alpha(t)^*\beta(t)$ 的方程。这只须以 $\beta^*(t)$ 右乘(1-3-9)式，再减去用 $\alpha(t)$ 左乘(1-3-13)式的复数共轭形式，则得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha(t)\beta^*(t)] = -\left(\mathrm{i}\omega_{\alpha\beta} + \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}\right)\alpha(t)\beta^*(t) + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\alpha(t)\alpha^*(t) - \beta(t)\beta^*(t)]F(t) \tag{1-3-16}$$

式中

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{E_\alpha - E_\beta}{\hbar} \tag{1-3-17}$$

关于 $\alpha^*(t)\beta(t)$ 的方程，可由下式得到

$$\alpha^*(t)\beta(t) = [\alpha(t)\beta^*(t)]^* \tag{1-3-18}$$

若令

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}{2} \tag{1-3-19}$$

则将上面得到的结果，重新罗列如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha(t)\alpha^*(t)] = -\gamma_\alpha[\alpha(t)\alpha^*(t)] - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\alpha^*(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta^*(t)]F(t) \tag{1-3-20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\beta(t)\beta^*(t)] = -\gamma_\beta[\beta(t)\beta^*(t)] + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\alpha^*(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta^*(t)]F(t) \tag{1-3-21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha(t)\beta^*(t)] = -[\mathrm{i}\omega_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}]\alpha(t)\beta^*(t)] + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\alpha(t)\alpha^*(t)$$

$$-\beta(t)\beta^*(t)]F(t) \tag{1-3-22}$$

$$\alpha^*(t)\beta(t)=[\alpha(t)\beta^*(t)]^* \tag{1-3-23}$$

上述方程的物理意义是明显的。(1-3-20)式表示在 t 时刻发现在 α 能级上的粒子数几率随时间的变化，来源于 α 能级上原子的自发衰减和受激辐射以及受激吸收过程。同样说明(1-3-21)式各项的物理意义。下面将会看到，$\alpha(t)\beta^*(t)$ 与 $\alpha^*(t)\beta(t)$ 将决定原子的电偶极矩。这一组方程对于研究光与二能级原子相互作用问题，是最基本的。以后将会看到，无论是采用算符还是密度矩阵来处理光与二能级原子相互作用问题，得到的方程，在意义上都与它们类似。

§1-4 光场中二能级原子的密度矩阵方程

现在讨论 N 个二能级原子与光场相互作用情形。一般而言，N 个二能级原子不可能处于相同的运动状态，若 N 个二能级原子处于各种不同运动状态的几率相等时，系综的物理量，可通过在量子力学平均的基础上，再取一次统计平均的方法求得。

若 N 个二能级原子之间无相互作用，第 n 个原子的波函数 $\psi_n(q,t)$ 为

$$\psi_n(q,t)=\sum_i C_{i,n}(t)\phi_{i,n}(q) \quad n=1,2,3,\cdots,N \tag{1-4-1}$$

上式中 i 表示对状态数求和。

N 个原子组成的体系的力学量 Q 的算符平均值为

$$\langle\overline{Q}\rangle=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int\psi_n^*(q,t)\hat{Q}\psi_n(q,t)\mathrm{d}q \tag{1-4-2}$$

将(1-4-1)式代入，得到

$$\langle\overline{Q}\rangle=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_j\sum_i C_{j,n}^*C_{i,n}\int\phi_{j,n}^*\hat{Q}\phi_{i,n}\mathrm{d}q \tag{1-4-3}$$

若引入

$$\overline{Q}_{j,i} = \int \phi_{j,n}^{*} \hat{Q} \phi_{i,n} \mathrm{d}q \tag{1-4-4}$$

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C_{j,n}^{*} C_{i,n} \tag{1-4-5}$$

则(1-4-3)式 可表示为

$$\langle \overline{Q} \rangle = \sum_{j,i} \rho_{i,j} \overline{Q}_{ji} \tag{1-4-6}$$

由上式看出，$\rho_{i,j}$具有几率密度的意义，因此称由(1-4-5)式定义的$\rho_{i,j}$的集合为 N 个原子组成的体系的密度矩阵。

当 N 个原子所处的各状态的几率不相等时，则应取统计平均。设处于 $\psi_n(q,t)$状态的几率为 P_n，且 $\sum P_n = 1$，(1-4-5)式应表示为

$$\rho_{i,j} = \sum_{n=1}^{N} P_n C_{j,n}^{*} C_{i,n} \tag{1-4-7}$$

则(1-4-6)式和(1-4-4)式，可保持其原来形式不变。

容易证明密度矩阵是厄密的，它的对角线上的矩阵元素为正值，而且密度矩阵的迹为 1。

现在讨论 N 个二能级原子的密度矩阵元素和它们的运动方程。对于二能级原子，它的波函数由(1-3-7)式表示，由(1-4-5)和(1-4-2)式，则得到 N 个二能级原子的密度矩阵元素为

$$\rho_{\alpha\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{*} \alpha_n, \quad \rho_{\beta\beta} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \beta_n \beta_n$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \beta_n^{*} \alpha_n, \quad \rho_{\beta\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{*} \beta_n \tag{1-4-8}$$

相应的二行二列矩阵为

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{\alpha\alpha} & \rho_{\alpha\beta} \\ \rho_{\beta\alpha} & \rho_{\beta\beta} \end{pmatrix} \tag{1-4-9}$$

由(1-4-8)式和(1-3-20)(1-3-21)(1-3-22)(1-3-23)式，容易得到，N 个二能级原子密度矩阵元素的运动方程为

$$\dot{\rho}_{\alpha\alpha} = -\gamma_{\alpha}\rho_{\alpha\alpha} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\rho_{\beta\alpha} - \rho_{\alpha\beta})F(t) \tag{1-4-10}$$

$$\dot{\rho}_{\beta\beta} = -\gamma_\beta \rho_{\beta\beta} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\rho_{\beta\alpha} - \rho_{\alpha\beta})F(t) \tag{1-4-11}$$

$$\dot{\rho}_{\alpha\beta} = -(\gamma_{\alpha\beta} + \mathrm{i}\omega_{\alpha\beta})\rho_{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{\beta\beta})F(t) \tag{1-4-12}$$

$$\rho_{\beta\alpha} = \rho_{\alpha\beta}^* \tag{1-4-13}$$

式中
$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{E_\alpha - E_\beta}{\hbar}, \qquad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}{2} \tag{1-4-14}$$

$\rho_{\alpha\alpha}$和 $\rho_{\beta\beta}$分别表示在 α 能级和 β 能级上发现粒子数的几率，它们随时间的变化来源于自发辐射过程和受激辐射、受激吸收过程；$\rho_{\alpha\beta}$和 $\rho_{\beta\alpha}$则决定 N 个二能级原子组成的系统的宏观电极化强度，证明如下。设单位体积内有 N 个二能级原子，根据定义，宏观电极化强度为

$$P = \sum_{s=1}^{N}\int \psi_s^*(q,t)\hat{\mu}\psi_s(q,t)\mathrm{d}q \tag{1-4-15}$$

上式中 $\hat{\mu}$ 为单个原子的电偶极矩算符。将二能级原子的波函数(1-3-7)式代入(1-4-15)式，并注意到对同一能量状态而言的电偶极矩 $\hat{\mu}$ 的跃迁矩阵元为零，使用(1-4-8)式后，得到

$$P = N\mu(\rho_{\beta\alpha} + \rho_{\alpha\beta}) \tag{1-4-16}$$

式中
$$\mu = \int \phi_\alpha^*(q,t)\hat{\mu}\phi_\beta(q)\mathrm{d}q \tag{1-4-17}$$

由此可见，密度矩阵元素 $\rho_{\alpha\beta}$和 $\rho_{\beta\alpha}$直接决定宏观电极化强度。

若引入矩阵

$$H = \begin{bmatrix} E_\alpha & F(t) \\ F(t) & E_\beta \end{bmatrix} \tag{1-4-18}$$

和(1-4-9)式，当不考虑衰减项时，可将(1-4-10)—(1-4-13)式表示为

$$\dot{\rho} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(H\rho - \rho H)$$
$$= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\rho] \tag{1-4-19}$$

若引入表示衰减的矩阵

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_\alpha & 0 \\ 0 & \gamma_\beta \end{pmatrix} \tag{1-4-20}$$

则可将(1-4-10)—(1-4-13)式表示为

$$\dot{\rho} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\rho] - \frac{1}{2}(\Gamma\rho + \rho\Gamma) \tag{1-4-21}$$

对于多能级原子，可进行类似讨论。

§1-5 麦克斯韦-布洛赫方程

借助前面得到的二能级原子在光场中运动的波函数方程或者密度矩阵方程，可以建立一组光场与二能级原子相互作用时关于原子和光场的半经典方程组。

首先建立 N 个二能级原子组成的系统，在光的电场作用下，它的宏观电极化强度随时间变化的方程。设光的电场强度为

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\{E_a(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + E_a^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)}\} \tag{1-5-1}$$

由(1-4-16)式，宏观电极化强度为

$$P = N\mu(\rho_{\alpha\beta} + \rho_{\beta\alpha}) \tag{1-4-16}$$

若设

$$P = \mathrm{i}N\mu\frac{1}{2}\{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)}\} \tag{1-5-2}$$

比较(1-4-16)与(1-5-2)式，得到

$$\begin{aligned} u &= -2\mathrm{i}\rho_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)} \\ v &= 2\mathrm{i}\rho_{\beta\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \end{aligned} \tag{1-5-3}$$

求(1-5-3)式对时间微商，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\mathrm{i}\dot{\rho}_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)} + 2\omega\rho_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)}$$

将(1-4-12)式代入上式，设不考虑衰减项，则上式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2(\omega_{\alpha\beta} - \omega)\rho_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)} + \frac{2}{\hbar}(\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{\beta\beta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)}F(t) \tag{1-5-4}$$

代入(1-5-3)式，并设

$$\Delta = \rho_{\alpha\alpha} - \rho_{\beta\beta} \tag{1-5-5}$$

使用(1-3-11)式表示的 $F(t)$，忽略含 2ω 的高频项，则(1-5-4)式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \mathrm{i}(\omega_{\alpha\beta} - \omega)u - \frac{\mu}{\hbar}E_a\Delta \tag{1-5-6}$$

利用同样方法，得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathrm{i}(\omega_{\alpha\beta} - \omega)v - \frac{\mu}{\hbar}E_a^*\Delta \tag{1-5-7}$$

其次求高能级与低能级上粒子数差 Δ 随时间变化的方程，由(1-5-5)和(1-4-10)(1-4-11)式，设不考虑衰减项，得到

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \dot{\rho}_{\alpha\alpha} - \dot{\rho}_{\beta\beta} = - \mathrm{i}\,\frac{2}{\hbar}(\rho_{\beta\alpha} - \rho_{\alpha\beta})F(t)$$

代入 $F(t)$ 的表示式，上式为

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = - \mathrm{i}\,\frac{2}{\hbar}(\rho_{\beta\alpha} - \rho_{\alpha\beta})\left[- \frac{\mu}{2}(E_a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + E_a^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right]$$

将(1-5-4)式代入上式，忽略含 2ω 的高频项，最后得到：

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\mu}{2\hbar}(uE_a^* + vE_a) \tag{1-5-8}$$

最后建立光的电场强度的方程。半经典理论中的光的电磁场，服从麦克斯韦方程组，下面列出麦克斯韦方程组和有关的关系式：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-5-9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \tag{1-5-10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-5-11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-5-12}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{1-5-13}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M} \tag{1-5-14}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{1-5-15}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{1-5-16}$$

$$J = \sigma E \tag{1-5-17}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 是光的电场强度，$\boldsymbol{H}$ 是光的磁场强度，$\boldsymbol{D}$ 是电位移矢量，$\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度，ρ 是自由电荷密度，$\boldsymbol{J}$ 是传导电流密度，ε_0 和 μ_0 分别是真空介电系数和真空导磁率，ε 和 μ_c 分别是介质的介电系数和介质导磁率，σ 是介质的导电率系数，$\boldsymbol{M}$ 是介质的磁化强度。在线性光学范围，介质的宏观电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与光的电场强度正比，设线性电极化系数为 χ，则有

$$\boldsymbol{P} = \chi\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{1-5-18}$$

代入(1-5-13)和(1-5-15)式，得到

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi) \tag{1-5-19}$$

在研究光与二能级原子组成的介质相互作用的问题中，一般认为 $\rho=0$，又因为一般光学材料是非磁性的，所以设 $\boldsymbol{M}=0$。现在建立关于 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程，对(1-5-9)式先取旋度运算，然后将(1-5-10)(1-5-14)(1-5-13)式代入后，得到：

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{1-5-20}$$

因为 $$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} \tag{1-5-21}$$

和 $$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon\nabla \cdot \boldsymbol{E} + (\nabla\varepsilon) \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{1-5-22}$$

一般而言，光学材料有很好的均匀性，所以 $\nabla\varepsilon=0$，由此得到 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}=0$，将此代入(1-5-21)式，最后(1-5-20)式为

$$\nabla^2 \cdot \boldsymbol{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{1-5-23}$$

为了简单，假设光场沿 x 轴传播，则上式为

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial E}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{1-5-24}$$

假设介质的 $\sigma=0$，上式最后形式为

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{1-5-25}$$

上式中的 c 为真空中的光速，

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{1-5-26}$$

下面将(1-5-1)式表示的 $E(x,t)$ 代入(1-5-25)式的左端，取光的电场强度振幅缓变近似：

$$\left|\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right| \ll k\left|\frac{\partial E}{\partial x}\right| \ll k^2 |E| \tag{1-5-27}$$

$$\left|\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right| \ll \omega\left|\frac{\partial E}{\partial t}\right| \ll \omega^2 |E| \tag{1-5-28}$$

再将(1-5-2)式表示的宏观电极化强度代入(1-5-25)式右端得到

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \simeq -\omega^2 P \tag{1-5-29}$$

这样，将 $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ 和 $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ 的缓变近似表示式和(1-5-29)式代入(1-5-25)式，并使用(1-5-2)式，比较所得方程两端含 $e^{i(kx-\omega t)}$ 的系数，则可将(1-5-25)式表示的二阶微分方程简化为一阶微分方程

$$c\frac{\partial E_a}{\partial x} + \frac{\partial E_a}{\partial t} = -\eta u \tag{1-5-30}$$

上式中

$$\eta = \frac{N\mu\omega}{2\varepsilon_0} \tag{1-5-31}$$

现将所得到的方程重列如下

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i(\omega_{\alpha\beta} - \omega)u - \frac{\mu}{\hbar}E_a\Delta$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i(\omega_{\alpha\beta} - \omega)v - \frac{\mu}{\hbar}E_a^*\Delta$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\mu}{2\hbar}(uE_a^* + vE_a)$$

$$c\frac{\partial E_a}{\partial x} + \frac{\partial E_a}{\partial t} = -\eta u$$

实际上还应考虑介质的宏观电极化强度变化过程中自身的衰减，这样(1-5-6)和(1-5-7)式右端应分别唯象地引入 $-u/T_2$ 和

$-v/T_2$，T_2 是横向弛豫时间，或者表示为 $-\gamma_\perp u$ 和 $-\gamma_\perp u$，$\gamma_\perp$ 为宏观电极化强度的弛豫速率。另外在(1-5-8)式应引入 $-(\Delta-\Delta_0)/T_1$ 项，其中 $-\Delta/T_1$ 表示因自发辐射引起的粒子数变化，T_1 为纵向弛豫时间，Δ_0 表示热平衡时的粒子数分布。这样，上述方程最后可表示为

$$c\frac{\partial E_a}{\partial x}+\frac{\partial E_a}{\partial t}=-\eta u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\mathrm{i}(\omega_{\alpha\beta}-\omega)u-\frac{\mu}{\hbar}E_a\Delta-\frac{u}{T_2} \tag{1-5-32}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\mathrm{i}(\omega_{\alpha\beta}-\omega)v-\frac{\mu}{\hbar}E_a^*\Delta-\frac{v}{T_2} \tag{1-5-33}$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}=\frac{\mu}{2\hbar}(uE_a^*+vE_a)-\frac{(\Delta-\Delta_0)}{T_1} \tag{1-5-34}$$

这一组半经典方程，经常用于讨论光学双稳性、激光器运转的不稳定性和混沌以及其它的光与二能级原子相互作用问题。在使用这些方程时应列出问题的具体边界条件和初始条件。

§1-6　光场中二能级原子的布洛赫方程

上面使用波函数和密度矩阵研究光与二能级原子的相互作用问题，建立了相应的方程组。事实上人们广泛直接使用二能级原子和光场的有关物理量的量子力学算符及其平均值的方程，讨论光与二能级原子相互作用问题，使用这类方程组，已经研究过一系列的量子光学、非线性光学以及激光物理学中的问题。下面要建立的光学布洛赫方程，是在半经典理论范围内，使用算符及其平均值讨论二能级原子问题较典型的和基本的，我们在这里将要进行较详细的讨论。

首先讨论二能级原子的电偶极矩算符。二能级原子的电偶极矩算符经常出现在光与二能级原子相互作用的哈密顿算符表示式

中，同时原子的电偶极矩与物质的宏观电极化强度相联系，所以讨论二能级原子的电偶极矩算符的具体形式，是很有意义的。

设二能级原子的上能级和下能级的能量分别为 E_a 和 E_β，相应的状态分别为 $|2\rangle$ 和 $|1\rangle$。根据量子力学，二能级原子的电偶极矩算符 $\hat{\mu}$ 的跃迁矩阵元素为

$$\mu_{22} = \langle 2|\hat{\mu}|2\rangle = 0 \tag{1-6-1}$$

$$\mu_{11} = \langle 1|\hat{\mu}|1\rangle = 0 \tag{1-6-2}$$

$$\mu_{21} = \langle 2|\hat{\mu}|1\rangle \tag{1-6-3}$$

$$\mu_{12} = \langle 1|\hat{\mu}|2\rangle = (\mu_{21})^* \tag{1-6-4}$$

一般而言，二能级原子的 μ_{12} 和 μ_{21} 为复数形式。因为二能级原子的电偶极矩 $\boldsymbol{\mu}=-e\boldsymbol{r}$ 在球坐标系可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= -er(\boldsymbol{u}_x\sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{u}_y\sin\theta\sin\phi + \boldsymbol{u}_z\cos\theta) \\ &= -er\left[\boldsymbol{u}_x\frac{1}{2}\sin\theta(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + \boldsymbol{u}_y\frac{i}{2}\sin\theta(e^{-i\phi} - e^{i\phi}) + \boldsymbol{u}_z\cos\theta\right]\end{aligned} \tag{1-6-5}$$

上式中 $\boldsymbol{u}_x$、$\boldsymbol{u}_y$ 和 $\boldsymbol{u}_z$ 分别表示在 x、y 和 z 方向上的单位矢量，而二能级原子上、下能级的本征态可用不同量子数的径向函数和球谐函数乘积表示

$$\begin{aligned}|2\rangle &= R_n(r)Y_l^m(\theta,\phi) \\ |1\rangle &= R_n'(r)Y_l^{m'}(\theta,\phi)\end{aligned} \tag{1-6-6}$$

可以看出，因为球谐函数具有正交性，二能级原子电偶极矩的量子力学表示中，$\hat{\mu}$ 的 x 分量和 y 分量对应于 $\Delta m = m - m' = \pm 1$ 的跃迁，z 分量对应于 $\Delta m = 0$ 跃迁，若光场为沿 z 轴传播的平面偏振波，则 $E_z = 0$，不必考虑 z 分量，由上式看出 μ_{12} 和 μ_{21} 可用复数表示：

$$\mu_{12} = \mu_r + i\mu_i \tag{1-6-7}$$

$$\mu_{21} = \mu_r - i\mu_i \tag{1-6-8}$$

上式中 μ_r 为实部，$i\mu_i$ 为虚部。根据(1-6-7)(1-6-8)式和(1-6-1)—(1-6-4)式，二能级原子的电偶极矩算符 $\hat{\mu}$ 可表示为非对角的二维

矩阵形式：

$$\hat{\mu} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{11} & \hat{\mu}_{12} \\ \hat{\mu}_{21} & \hat{\mu}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_r + i\mu_i \\ \mu_r - i\mu_i & 0 \end{pmatrix} \tag{1-6-9}$$

利用量子力学中描写电子自旋运动的泡利矩阵，可以将上面表示的一个原子的电偶极矩算符 $\hat{\mu}$ 写成线性形式。泡利矩阵为

$$\hat{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1-6-10}$$

将 $\hat{r}_1$ 和 $\hat{r}_2$ 代入(1-6-9)式，得到

$$\hat{\mu} = \mu_r \hat{r}_1 - \hat{\mu}_i \hat{r}_2 \tag{1-6-11}$$

关于算符 $\hat{\mu}$ 的运算，应按泡利算符的对易关系进行。根据量子力学，泡利算符的对易关系为

$$\hat{r}_1\hat{r}_2 - \hat{r}_2\hat{r}_1 = 2i\hat{r}_3 \tag{1-6-12}$$

$$\hat{r}_2\hat{r}_3 - \hat{r}_3\hat{r}_2 = 2i\hat{r}_1 \tag{1-6-13}$$

$$\hat{r}_3\hat{r}_1 - \hat{r}_1\hat{r}_3 = 2i\hat{r}_2 \tag{1-6-14}$$

简单表示为

$$\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{r}} = 2i\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1-6-15}$$

由(1-6-11)式看出，二能级原子的电偶极算符可以用表示电子自旋的泡利算符表示，可以推想，二能级原子在光场中的运动与电子在磁场中的运动相类似，所以在光场中的二能级原子，也应该出现一系列的类似于磁共振方面的效应。

现在在半经典理论范围内建立在光场作用下的一个二能级原子的赝自旋算符运动方程。所谓半经典理论，即认为光场为经典电磁场，若光的电场强度为 $\boldsymbol{E}$，则在电偶极近似下，一个二能级原子与光场相互作用时，整个系统的哈密顿算符 $\hat{H}$ 为

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}' \\ &= \hat{H}_0 - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \cdot \hat{\mu} \end{aligned} \tag{1-6-16}$$

上式中相互作用的哈密顿算符 $\hat{H}'$ 为

$$\hat{H}' = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \cdot \hat{\mu} \tag{1-6-17}$$

引用单位矩阵 $\hat{I}$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

并使用(1-6-10)式中的 $\hat{r}_3$ 表示式，可将(1-6-16)式中的原子的哈密顿算符表示为

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(E_\alpha + E_\beta)\hat{I} + \frac{1}{2}(E_\alpha - E_\beta)\hat{r}_3 \tag{1-6-18}$$

上式中 E_α 和 E_β 分别为二能级原子的高能级和低能级的能量。将(1-6-11)式表示的 $\hat{\mu}$ 代入(1-6-17)式，得到

$$\hat{H}' = -(\mu_r \cdot E)\hat{r}_1 + (\mu_i \cdot E)\hat{r}_2 \tag{1-6-19}$$

如果我们这样选择二能级原子的状态$|2\rangle$和$|1\rangle$的相位关系，即使得 $\mu_i = 0$，则(1-6-19)式为

$$\hat{H}' = -(\mu_r \cdot E)\hat{r}_1 \tag{1-6-20}$$

代入(1-6-16)式，得到哈密顿算符 $\hat{H}$ 为

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(E_\alpha + E_\beta)\hat{I} + \frac{1}{2}(E_\alpha - E_\beta)\hat{r}_3 - (\mu_r \cdot E)\hat{r}_1 \tag{1-6-21}$$

现在建立算符 $\hat{r}_1$、$\hat{r}_2$ 和 $\hat{r}_3$ 的运动方程。根据量子力学，任意算符 $\hat{O}$ 的运动方程为

$$i\hbar\dot{\hat{O}} = [\hat{O}, \hat{H}] = [\hat{O}\hat{H} - \hat{H}\hat{O}] \tag{1-6-22}$$

首先建立 $\hat{r}_1$ 的运动方程，由上式则有

$$\dot{\hat{r}}_1 = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}\hat{r}_1 - \hat{r}_1\hat{H}]$$

将(1-6-21)式代入，经计算得到

$$\dot{\hat{r}}_1 = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}(E_\alpha + E_\beta)(\hat{r}_3\hat{r}_1 - \hat{r}_1\hat{r}_3)\right]$$

使用泡利算符对易关系(1-6-14)式，上式则为

$$\dot{\hat{r}}_1(t) = -\omega_{\alpha\beta}\hat{r}_2(t) \tag{1-6-23}$$

上式中 $\omega_{\alpha\beta} = (E_\alpha - E_\beta)/\hbar$。同理得到

$$\dot{\hat{r}}_2(t) = \omega_{\alpha\beta}\hat{r}_1(t) + \frac{2}{\hbar}(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{E})\hat{r}_3(t) \tag{1-6-24}$$

$$\dot{\hat{r}}_2(t) = -\frac{2}{\hbar}(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{E})\hat{r}_2(t) \tag{1-6-25}$$

在实际问题中关心的是算符的平均值，现在对以上三个算符运动方程取平均。首先认为量子的关联可以忽略，算符的乘积 $\boldsymbol{E}\hat{r}_2$ 等的平均值可以近似表示为

$$\langle \boldsymbol{E}\hat{r}_2(t)\rangle \cong \langle \boldsymbol{E}\rangle\langle \hat{r}_2(t)\rangle \tag{1-6-26}$$

此外，在半经典理论中应考虑再辐射对光场的影响，这要用麦克斯韦方程组，然而麦克斯韦方程组中的量是场的平均值，不是算符。所以这里要用场的平均值代替场的算符，也就是(1-6-26)式中场的算符用它的平均值代替。这样一来，半经典理论不能很好地描写自发辐射。

在进行上述考虑之后，引入

$$R_j(t) \equiv \langle \hat{r}_j\rangle, \quad j = 1,2,3 \tag{1-6-27}$$

则(1-6-23)--(1-6-25)式为

$$\dot{R}_1(t) = -\omega_{\alpha\beta}R_2(t) \tag{1-6-28}$$

$$\dot{R}_2(t) = \omega_{\alpha\beta}R_1(t) + \alpha_a E(\boldsymbol{r},t)R_3(t) \tag{1-6-29}$$

$$\dot{R}_3(t) = -\alpha_a E(\boldsymbol{r},t)R_2(t) \tag{1-6-30}$$

上式中的 α_a 为

$$\alpha_a = \frac{2\mu}{\hbar} \tag{1-6-31}$$

设

$$\boldsymbol{\mu} = \mu\boldsymbol{u}_0 \tag{1-6-32}$$

式中 $\boldsymbol{u}_0$ 表示单位矢量，(1-6-24)和(1-6-25)式中 $2\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)/\hbar$ 表示为

$$\frac{2}{\hbar}\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{E} = \alpha_a E(\boldsymbol{r},t) \tag{1-6-33}$$

$E(\boldsymbol{r},t)$是 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{u}_0$ 方向上的分量。

在直角坐标系中引入

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}R_1 + \boldsymbol{j}R_2 + \boldsymbol{k}R_3 \tag{1-6-34}$$

$$M = iM_x + jM_y + kM_z \tag{1-6-35}$$

上式中令 $M_x(t) = -\alpha_a E(\boldsymbol{r},t)$，$M_y(t)=0$，$M_z(t)=\omega_{\alpha\beta}$，可将(1-6-28)…(1-6-30)式表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{R} \tag{1-6-36}$$

方程(1-6-28)—(1-6-30)式在形式上类似于磁共振问题中的自旋进动方程，所以可以把 $\boldsymbol{R}(t)$ 称为赝自旋或能量自旋。实际上，$R_3(t)$ 表示在高能级与低能级上粒子数差；$R_3(0)=|\alpha|^2-|\beta|^2$，$R_1(t)$ 和 $R_2(t)$ 是与原子跃迁电偶极矩有关的物理量；$R_1(0)=\alpha^*\beta+\alpha\beta^*$，$R_2(0)=-\mathrm{i}(\alpha^*\beta+\alpha\beta^*)$。

现在讨论旋转波近似。方程(1-6-36)式是描写 $\boldsymbol{R}(t)$ 在静止坐标系(x,y,z)中作进动运动的方程，如图 1-6-1 所示。现在转动坐标系研究这个方程，仍可将转矩 $\boldsymbol{M}(t)$ 分解为三个分量，它们是对着 z 轴观察在 x-y 平面上以频率 ω 作反时针方向转动的分量 $\boldsymbol{M}_1$ 和顺时针方向在 x-y 平面以频率 ω 转动的分量 $\boldsymbol{M}_2$ 以及沿 z 轴的分量 $\boldsymbol{M}_3$。设光的电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_a[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{c.c}]$。为了与(1-6-36)式结果一致，这些分量为

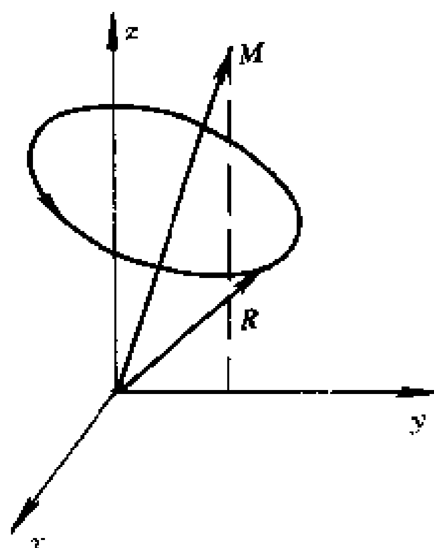


图 1-6-1　$\boldsymbol{R}(t)$的进动运动

$$\boldsymbol{M}_1 = -\, i\alpha_a E_a\cos\omega t - j\alpha_a E_a\sin\omega t \tag{1-6-37}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = -\, i\alpha_a E_a\cos\omega t + j\alpha_a E_a\sin\omega t \tag{1-6-38}$$

$$\boldsymbol{M}_3 = \omega_{\alpha\beta}\boldsymbol{k} \tag{1-6-39}$$

现在的 $\boldsymbol{M}(t)$ 为

$$\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{M}_1(t) + \boldsymbol{M}_2(t) + \boldsymbol{M}_3(t) \tag{1-6-40}$$

设观察者位于对着 z 轴看在 x-y 平面作反时针方向转动的转动坐

标系内观察，则 $\boldsymbol{M}_1$ 是静止的，它对 $\boldsymbol{R}(t)$ 有积累作用，而 $\boldsymbol{M}_2$ 则是以 2ω 频率作高速转动，对 $R(t)$ 基本没有积累作用，于是可忽略 $\boldsymbol{M}_2(t)$。这样(1-6-40)式变为

$$\boldsymbol{M}(t)=\boldsymbol{M}_1(t)+\boldsymbol{M}_3(t) \tag{1-6-41}$$

在旋转近似下的(1-6-36)式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_3)\times\boldsymbol{R}$$

写成分量形式为

$$\begin{pmatrix}\dot{R}_1(t)\\ \dot{R}_2(t)\\ \dot{R}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -\alpha_a E_a\cos\omega t & -\alpha_a E_a\sin\omega t & \omega_{a\beta}\\ R_1(t) & R_2(t) & R_3(t)\end{vmatrix} \tag{1-6-42}$$

由此得到

$$\dot{R}_1(t)=-\alpha_a E_a R_3\sin\omega t-\omega_{a\beta}R_2 \tag{1-6-43}$$

$$\dot{R}_2(t)=\alpha_a E_a R_3\cos\omega t+\omega_{a\beta}R_1 \tag{1-6-44}$$

$$\dot{R}_3(t)=-\alpha_a E_a R_2\cos\omega t+\alpha_a E_a R_1\sin\omega t \tag{1-6-45}$$

如果在此转动坐标系中引入一个接近稳定的矢量 $\boldsymbol{\rho}(t)$，使其三个分量 $\xi(t)$，$\eta(t)$，$\zeta(t)$ 为

$$\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\\ \zeta(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t & 0\\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_1(t)\\ R_2(t)\\ R_3(t)\end{pmatrix} \tag{1-6-46}$$

展开后得到 ξ,η,ζ 与 R_1、R_2、R_3 之间的变换关系为

$$\xi(t)=R_1(t)\cos\omega t+R_2(t)\sin\omega t \tag{1-6-47}$$

$$\eta(t)=-R_1(t)\sin\omega t+R_2(t)\cos\omega t \tag{1-6-48}$$

$$\zeta(t)=R_3(t) \tag{1-6-49}$$

将以上三式对时间微商，可得到 $\dot{\xi}(t)$，$\dot{\eta}(t)$ 和 $\dot{\zeta}(t)$ 的方程。例如将(1-6-47)式对时间微商，得到

$$\dot{\xi}(t)=\dot{R}_1(t)\cos\omega t+\dot{R}_2(t)\sin\omega t-R_1\omega\sin\omega t+R_2\omega\cos\omega t$$

将(1-6-43)(1-4-44)和(1-6-48)(1-6-49)式代入，最后得到

$$\dot{\xi}(t)=-(\omega_{a\beta}-\omega)\eta(t)=-\eta(t)\delta \tag{1-6-50}$$

上式中

$$\delta = \omega_{\alpha\beta} - \omega \tag{1-6-51}$$

同理可得：

$$\dot{\eta}(t) = \xi(t)\delta + \alpha_a E_a \zeta(t) \tag{1-6-52}$$

$$\dot{\zeta}(t) = -\alpha_a E_a \eta(t) \tag{1-6-53}$$

现在如果引入矢量 $\boldsymbol{N}(t)$，在直角坐标系中令它的三个分量为

$$N_x(t) = -\alpha_a E_a, \qquad N_y(t) = 0, \qquad N_z(t) = \delta \tag{1-6-54}$$

则可将(1-6-50)(1-6-52)(1-6-53)式表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{N}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t) \tag{1-6-55}$$

所以仍可以表示为 $\boldsymbol{\rho}(t)$的进动方程，只不过是在转动坐标系中，所有的量在时间上都是缓变的了。

关于 $\xi(t)$，$\eta(t)$，$\zeta(t)$的物理意义，由(1-6-49)式看出，$\zeta(t)$代表二能级原子的高能级与低能级的粒子数差，$\eta(t)$代表原子的电偶极矩与光相互作用的有效性，由(1-6-53)式看出，它同光场作用的结果是使粒子数差 $\zeta(t)$随时间变化。因此 $\eta(t)$代表原子吸收光场能量的能力，或者说它代表电偶极矩的虚部。同理，$\xi(t)$可理解为原子电偶极矩损耗光场能量的能力，就是说它代表电偶极矩的实部。

考虑到实际情况，存在着反转粒子数的自发衰减和外界泵浦，因此要在(1-6-53)式中引入$-(\zeta-\zeta_0)/T_1$ 项，T_1 是纵向弛豫时间；同时存在着原子的电偶极子振荡的衰减，为此要在(1-6-50)式中引入$-\xi/T_2$ 项，在(1-6-52)式中引入$-\eta/T_2$ 项，T_2 是横向弛豫时间。考虑到这些唯象的引入项后，(1-6-50)(1-6-52)(1-6-53)式变为

$$\dot{\xi} = -\frac{\xi}{T_2} - \eta\delta \tag{1-6-56}$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\eta}{T_2} + \xi\delta + \alpha_a E_a \zeta \tag{1-6-57}$$

$$\dot{\zeta} = -\frac{\zeta - \zeta_0}{T_1} - \alpha_a E_a \eta \qquad (1\text{-}6\text{-}58)$$

这就是光学布洛赫方程。这里我们是通过二能级原子的赝自旋算符逐步建立的,事实上通过其它途径也可以得到上述方程组。

最后我们要指出(1-6-56)(1-6-57)式与(1-2-24)式在形式上是一致的,可以说经典的方程是在$\zeta=-1$情形下的半经典方程。$\zeta=-1$表示原子处于基态,即未被激发,所以它的行为是经典的,可用洛仑兹的线性振子模型讨论。此外在经典情形$\alpha_a=e/mZ_0\omega$,Z_0是没有限制的;在半经典情形$\alpha_a=2\mu/\hbar$,由电偶极矩μ决定,是有限的。

下面应用光学布洛赫方程讨论光学章动和光学自由感应衰减现象。

光学章动 现在讨论当光的电场强度$E_a=E_0$(常数),并且在准确共振情况下($\delta=0$),方程(1-6-6)—(1-6-58)式的解及其物理意义。为了简单,不考虑上述方程中的衰减项,于是(1-6-56)—(1-6-58)式变为

$$\dot{\xi}(t) = 0 \qquad (1\text{-}6\text{-}59)$$

$$\dot{\eta}(t) = \alpha_a E_a \zeta(t) \qquad (1\text{-}6\text{-}60)$$

$$\dot{\zeta}(t) = -\alpha_a E_a \eta(t) \qquad (1\text{-}6\text{-}61)$$

为求解上述方程,引入无量纲的量Θ:

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha_a E_a(t')\mathrm{d}t' \qquad (1\text{-}6\text{-}62)$$

$\Theta(t)$与光脉冲面积成正比,当光场在t_2-t_1时间为E_0时,如图1-6-2所示,积分(1-6-62)式得到

$$\Theta(t) = \alpha_a E_0(t_2 - t_1) = \Omega(0)(t_2 - t_1) \qquad (1\text{-}6\text{-}63)$$

上式中$\Omega(0)$为

$$\Omega(0) = \alpha_a E_0 \qquad (1\text{-}6\text{-}64)$$

称为共振作用时的拉比频率,它表示二能级原子在能级之间跃迁时的相干激发速率。如果采用(1-6-62)式表示的$\Theta(t)$,(1-6-58)

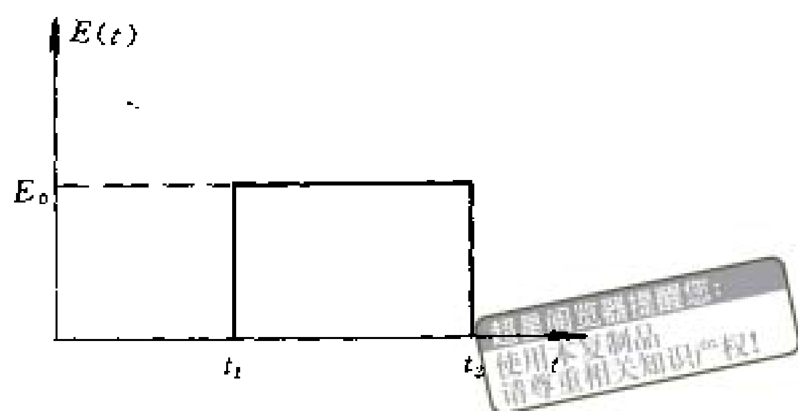


图 1-6-2

(1-6-61)式的解可表示为

$$\xi(t) = \xi(0) \tag{1-6-65}$$

$$\eta(t) = \eta(0)\cos\Theta(t) + \zeta(0)\sin\Theta(t) \tag{1-6-66}$$

$$\zeta(t) = \zeta(0)\cos\Theta(t) - \eta(0)\sin\Theta(t) \tag{1-6-67}$$

上式中 $\xi(0)$、$\eta(0)$、$\zeta(0)$分别表示 $\xi(t)$、$\eta(t)$、$\zeta(t)$的初始值。

由此看出，在准确共振情形，ρ 就是简单的在图 1-6-1 的 y-z 平面内以 $\Omega(0)=\alpha_a E_0$ 的频率从上向下运动。而在原来的非转动的坐标系中，ρ矢量以频率 ω 绕 z 轴快速进动，这样，在此之上又叠加了较比缓慢的从上向下的运动。在刚体力学中，称这种进动的矢量从上向下的缓慢运动为章动。

光学章动现象应该在光脉冲情形出现，一个阶梯形光脉冲在放大介质中传播时，它的前沿的强度产生振荡调制，而且衰减的规律是正弦的，由此可表达出关于弛豫过程的信息，如图 1-6-3 所示。从物理上来看，是强的相干光脉冲将与之共振作用的原子，相继地从低状态送入相干叠加状态，再

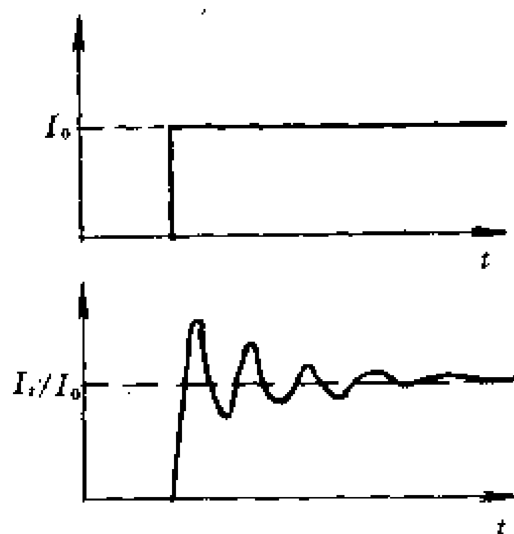


图 1-6-3 光学章动

进入高状态；然后又以非常大的电偶极矩返回到叠加态，重新回到低状态，这种循环的重复，由于在介质中的弛豫过程而衰减。由光场引起的反转粒子数的振荡，导致光场的振幅调制，观察到的调制频率是拉比频 $\Omega(\delta)$，它的表示式为

$$\Omega(\delta) = [\delta^2 + (\alpha_a E_0)^2]^{1/2}$$

当共振作用时，$\delta=0$，上式即为 $\Omega(0)$。欲使这种效应衰减以前，应进行若干次振荡，显然要求$\Omega(0)$应大于电偶极矩振荡时间的倒数 $1/T_2$，即要求$\Omega(0)>1/T_2$，或者 $\Omega(0)>\Delta\omega$，$\Delta\omega$ 为原子跃迁产生的光谱线的频宽。这也相当于要求光脉冲的持续时间应等于几个周期 $1/(\alpha_a E_0)$，即光脉冲面积应超过几个 π。

使用连续激光与非均匀加宽气体物质共振作用，根据上面对光学章动的分析，要求光与介质共振相互作用应突然开始，这有几种实现方法。一种是利用气体介质内的斯塔克电场调制效应。当介质未加外电场时，入射激光频率与介质共振频率相差大，不足以产生共振作用；然后若突然加上一个上升时间极短的矩形电场脉冲，由于斯塔克效应，使介质共振频率恰好移动到与入射激光频率相重合，从而突然发生共振相互作用，此时将伴随有光学章动现象出现。图 1-6-4 是使用 CO_2 激光器输出的 $P(32)$ 支谱线的激光，入射到 $C^{13}H_3F$ 气体，采用斯塔克电场调制方法，获得的光学章动。

还可以利用连续激光器腔内电光晶体的调频效应，对连续激光施加方形脉冲调频，在未调频时，激光频率与气体介质共振频率不重合；在突然施加矩形脉冲调频的一瞬间，激光与介质突然共振，可观察到光学章动现象。

光学自由感应衰减 现在讨论当上面研究的光学章动现象实验中的激光与介质相互作用经过一段时间，达到稳定状态后，突然去掉入射的激光，此时介质的宏观电极化强度随时间变化问题。介质的宏观电极化强度由(1-2-25)式为

$$P(t) = Nez_0\int \mathrm{Re}\{[\xi(\delta',t) + \mathrm{i}\eta(\delta',t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\}g(\delta')\mathrm{d}\delta'$$

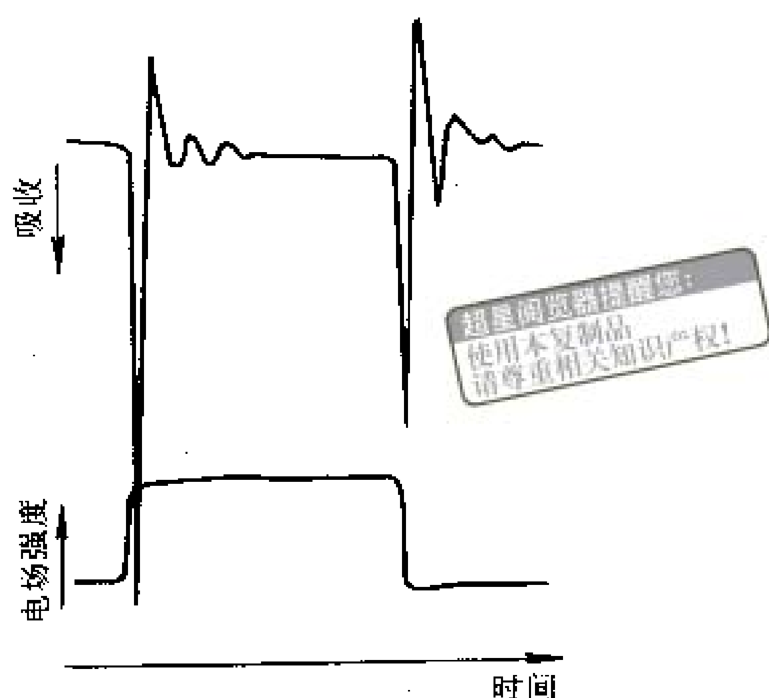


图 1-6-4

上式中的 $g(\delta')$是光谱线的线型函数。可以使用光学布洛赫方程求出 $\xi(t)$和 $\eta(t)$，最后将宏观电极化强度 $P(t)$的表示式求出来。

这里作些物理上的讨论。当光场与二能级原子组成的介质相互作用一段时间达到稳定状态，若突然去掉光场，介质内感生的宏观电极化强度，不会突然消失，光学布洛赫方程(1-6-58)式中的矢量 $\rho(t)$将作进动运动，因而继续辐射相干光场。但是在谱线的非均匀加宽内，原子有不同的共振频率，所以相应的电偶极矩有不同的进动频率，使得它们的相位逐渐失相，辐射成为衰减的，最后消失，如图 1-6-5 所示。上述过程称为光学自由感应衰减，这种效应在核磁共振研究中，首先被哈恩在 1950 年发现，称为自由感应衰减。

实验上是用探测拍频信号观察光学自由感应衰减现象。这是因为自由感应衰减过程中所产生的瞬态相干辐射场的频率与入射的激光的频率不相同，所以在透射光强中，可以观察到这两种辐射场的拍频信号。图 1-6-6 是在 I_2 中观测到的光学自由感应衰减现象。实验使用的激光波长为 580.8nm，采用光电调频方法控制入射激光频率，频移为 6MHz。图的下边是在电光调频晶体上施加的

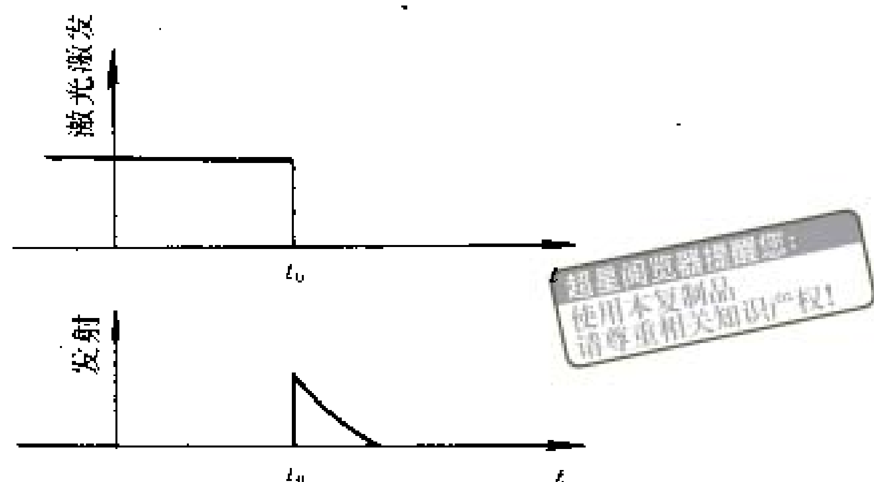


图 1-6-5　光学自由感应衰减

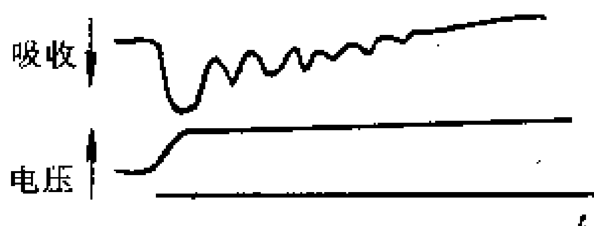


图 1-6-6　I_2 气体的自由感应衰减

电脉冲波形。

§1-7　光场的量子化

在本章的§1-3到§1-6节中，我们使用半经典理论讨论了光场与二能级原子的相互作用，在那里假设光场是经典电磁场。为了从全量子理论出发，讨论光场与二能级原子的相互作用问题，首先应将光场量子化。

为了将光辐射场纳入量子力学范畴讨论，首先应建立经典电磁场方程的正则形式，找出与经典电磁场等同的力学体系，在此基础上对光场进行量子化。现在引用矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 讨论自由空间内的

经典电磁场。根据电动力学，矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 与光的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的关系为

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1-7-1}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1-7-2}$$

对于自由空间，$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{P}=0$，$\boldsymbol{J}=0$，将(1-7-1)和(1-7-2)式代入麦克斯韦方程组的(1-5-9)式，考虑到上述情形，采用库伦规范

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{1-7-3}$$

则得到自由空间中的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 的方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1-7-4}$$

现在求矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$，为此对上面的方程进行变量分离，令

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_l \boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r}) f_l(t) \tag{1-7-5}$$

式中求和号表示对给定体积中光的模式数目求和，用 l 表示其中的第 l 个光模式。将(1-7-5)式代入(1-7-4)式，得到

$$c^2 \frac{\nabla^2 (\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r}))_j}{(\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r}))_j} = \frac{\ddot{f}_l(t)}{f_l(t)} \overset{令}{=} -\omega_l^2 \tag{1-7-6}$$

$$j = x, y, z$$

于是得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r}) + \frac{\omega_l^2}{c^2}\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1-7-7}$$

$$\ddot{f}_l(t) + \omega_l^2 f_l(t) = 0 \tag{1-7-8}$$

若令 $k_l^2=\omega_l^2/c^2$，上式的解为

$$\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1-7-9}$$

$$f_l(t) = |f_l| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l t} \tag{1-7-10}$$

上式中 $\boldsymbol{u}_l$ 是 $\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r})$ 的单位矢量。设讨论体积 V 内的光辐射场，封闭体积的边长为 D，体积 $V=D^3$。周期性边界条件为

$$\boldsymbol{A}(x=0,y,z) = \boldsymbol{A}(x=D,y,z)\ 等 \tag{1-7-11}$$

所以有下列关系：

$$e^{ik_xD} = e^{ik_yD} = e^{ik_zD} = 1 \tag{1-7-12}$$

于是 $\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r})$满足

$$\int_V \boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}_{l'}^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}v = \int_V \boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}_{-l'}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}v = V\delta_{ll'} \tag{1-7-13}$$

最后求出矢势 $\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r},t)$的表示式为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_l [\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r})f_l(t) + \boldsymbol{A}_l^*(\boldsymbol{r})f_l^*(t)] \tag{1-7-14}$$

现在讨论给定体积 V 内，这组光场的总能量 W，根据电动力学 W 为

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \mu_0 \boldsymbol{H}^2)\mathrm{d}v \tag{1-7-15}$$

将(1-7-1)和(1-7-2)式代入，得到

$$W = \frac{1}{2}\int_V [\varepsilon_0 (\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t})^2 + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{A})^2]\mathrm{d}v \tag{1-7-16}$$

将 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$代入，经计算得到

$$W = 2\varepsilon_0 V \sum_l \omega_l^2 f_l(t) f_l^*(t) \tag{1-7-17}$$

引入无量纲的量

$$q_l(t) = (\varepsilon_0 V)^{1/2}[f_l(t) + f_l^*(t)] \tag{1-7-18}$$

$$p_l(t) = -\mathrm{i}(\varepsilon_0 V)^{1/2}\omega_l[f_l(t) - f_l^*(t)] \tag{1-7-19}$$

由此可解出 $f_l(t)$和 $f_l^*(t)$为

$$f_l(t) = (\varepsilon_0 V)^{-1/2}(2\omega_l)^{-1}[\omega_l q_l(t) + \mathrm{i}p_l(t)] \tag{1-7-20}$$

$$f_l^*(t) = (\varepsilon_0 V)^{-1/2}(2\omega_l)^{-1}[\omega_l q_l(t) - \mathrm{i}p_l(t)] \tag{1-7-21}$$

将上二式代入(1-7-17)式，得到光场的总能量为

$$W = \sum_l \frac{1}{2}(p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2) \tag{1-7-22}$$

所以第 l 个光模式的能量可表示为

$$W_l = \frac{1}{2}(p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2) \tag{1-7-23}$$

上式表明，光场的总能量与一组线性谐振子能量相等，所以一种光模式与经典力学中质量为 1，动量为 p_l，坐标为 q_l 的一种线性谐振子相当，称此为场振子。这是在经典电磁学和经典力学范围内得出的结果。

现在将光辐射场量子化，由上面讨论可知，相当于将场振子运动量子化。在量子力学中的线性谐振子问题是人们熟悉的，在此基础上先将光场总能量算符化，这相当于将(1-7-23)式中的 p_l 和 q_l 算符化。使用量子力学中线性谐振子的结果，引入算符 $\hat{b}_l(t)$ 和 $\hat{b}_l^+(t)$：

$$\hat{b}_l(t) = (2\hbar\omega_l)^{-1/2}[\omega_l\hat{q}_l(t) + \mathrm{i}\hat{p}_l(t)] \tag{1-7-24}$$

$$\hat{b}_l^+(t) = (2\hbar\omega_l)^{-1/2}[\omega_l\hat{q}_l(t) - \mathrm{i}\hat{p}_l(t)] \tag{1-7-25}$$

因为由(1-7-20)和(1-7-21)式看出，$\omega_l q_l(t) + \mathrm{i}p_l(t)$ 正比于 $f_l(t)$，所以此处的 $\hat{b}_l(t)$ 也有同 $f_l(t)$ 相同的时间关系：

$$\hat{b}_l(t) = \hat{b}_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l t} \tag{1-7-26}$$

$$\hat{b}_l^+(t) = \hat{b}_l^+ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_l t} \tag{1-7-27}$$

由(1-7-24)和(1-7-25)式求出 $\hat{q}_l(t)$ 和 $\hat{p}_l(t)$ 为

$$\hat{q}_l(t) = \left(\frac{\hbar}{2\omega_l}\right)^{1/2}[\hat{b}_l^+(t) + \hat{b}_l(t)] \tag{1-7-28}$$

$$\hat{p}_l(t) = \mathrm{i}\left(\frac{\hbar\omega_l}{2}\right)^{1/2}[\hat{b}_l^+(t) - \hat{b}_l(t)] \tag{1-7-29}$$

将它们代入(1-7-22)式，光场的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_l \hbar\omega_l(\hat{b}_l^+\hat{b}_l + \hat{b}_l\hat{b}_l^+) \tag{1-7-30}$$

算符 $\hat{b}_l^+$ 和 $\hat{b}_l$ 的对易关系，可由 $\hat{p}_l$ 与 $\hat{q}_l$ 算符的对易关系求出

$$\hat{b}_l\hat{b}_{l'}^+ - \hat{b}_{l'}^+\hat{b}_l = \delta_{ll'} \tag{1-7-31}$$

$$\hat{b}_l\hat{b}_{l'} - \hat{b}_{l'}\hat{b}_l = 0 \tag{1-7-32}$$

$$\hat{b}_l^+\hat{b}_{l'}^+ - \hat{b}_{l'}^+\hat{b}_l^+ = 0 \tag{1-7-33}$$

由(1-7-31)式得到

$$\hat{b}_l\hat{b}_l^+ = 1 + \hat{b}_l^+\hat{b}_l \tag{1-7-34}$$

代入(1-7-30)式得到

$$\hat{H} = \sum_l \hbar\omega_l(\hat{b}_l^+\hat{b}_l + \frac{1}{2}) \tag{1-7-35}$$

实际上

$$\hat{b}_l^+\hat{b}_l = n_l \tag{1-7-36}$$

是第 l 个光模式中的光子数目，$\hat{b}_l^+$ 是第 l 个光模式的光子产生算符，$\hat{b}_l$ 是光子湮没算符。

再来讨论光的电磁场的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 的算符化问题，由(1-7-14)式看出，这要求出 $f_l(t)$ 和 $f_l^*(t)$ 的算符形式。为此可先将(1-7-20)和(1-7-21)式算符化，然后与(1-7-24)(1-7-25)式联合在一起，求出 $\hat{f}_l(t)\hat{f}_l^*(t)$ 与 $\hat{b}_l^+(t)$，$\hat{b}_l(t)$ 的关系为

$$\hat{f}_l(t) = (\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V\omega_l})^{1/2}\hat{b}_l(t) \tag{1-7-37}$$

$$\hat{f}_l^*(t) = (\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V\omega_l})^{1/2}\hat{b}_l^+(t) \tag{1-7-38}$$

将它们代入(1-7-14)式，其中 $\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{r})$ 用(1-7-9)式代入，最后得到电磁场的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 的算符的形式为

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0 V}}\boldsymbol{u}_l[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l^+(t)] \tag{1-7-39}$$

上式中的 $\hat{b}_l(t)$，$\hat{b}_l^+(t)$ 与时间关系如(1-7-26)(1-7-27)式所示。

由此可求出光的电场强度算符 $\hat{\boldsymbol{E}}$ 和磁场强度算符 $\hat{\boldsymbol{H}}$ 的表示式，因为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

将(1-7-39)式代入，得到

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{i}\sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\boldsymbol{u}_l[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l^+(t)] \tag{1-7-40}$$

而磁场强度与矢势 $\boldsymbol{A}$ 之间关系为

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{A}$$

将(1-7-39)式代入，得到磁场强度算符为

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\mathrm{i}}{c\mu_0}\sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}(\boldsymbol{u}_l \times \boldsymbol{n}_l)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l^{\dagger}(t)\right] \tag{1-7-41}$$

§1-8 二能级原子与光场相互作用的哈密顿算符

研究原子与光场相互作用时表现出的各类量子光学现象，无论是按照半经典理论，还是按全量子理论处理，一般总是首先要写出问题的相互作用哈密顿算符。

首先讨论由原子与光场组成的系统的总能量 H，它显然是光场能量、原子的电子能量和原子与光场相互作用能量之和，由经典电动力学可表示为

$$H = \frac{1}{2}\sum_l (p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e_i e_j}{r_{ij}} + \sum_j \frac{1}{2m_j}[\boldsymbol{P}_j - e_j\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_j,t)]^2 \tag{1-8-1}$$

上式中 $\boldsymbol{P}_j$ 是正则动量，它与普通动量 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$ 之间关系为

$$\boldsymbol{P}_j = m\boldsymbol{v} + l\boldsymbol{A} \tag{1-8-2}$$

由(1-8-1)式得到系统的哈密顿算符为

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2}\sum_l (\hat{p}_l^2 + \omega_l^2\hat{q}_l^2) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e_i e_j}{r_{ij}} + \sum_j \frac{1}{2m_j}[\boldsymbol{P}_j - e_j\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}_j,t)]^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_l (\hat{p}_l^2 + \omega_l\hat{q}_l^2) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{l_i l_j}{r_{ij}} + \sum_j \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_j}{2m_j} - \sum_j \frac{e_j}{m_j}[\hat{\boldsymbol{p}}_j\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}_j,t)\end{aligned}$$

$$+\hat{A}(\boldsymbol{r}_j,t)\hat{\boldsymbol{p}}_j]+\sum_j\frac{e_j^2}{2m_j}\hat{A}^2(\boldsymbol{r}_j,t) \qquad (1\text{-}8\text{-}3)$$

其中 $$\hat{H}_0=\frac{1}{2}\sum_l(\hat{p}_l^2+\omega_l^2\hat{q}_l^2)+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e_ie_j}{r_{ij}}+\sum_j\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_j^2}{2m_j} \qquad (1\text{-}8\text{-}4)$$

$$\hat{H}'=-\frac{1}{2}\sum_j\frac{e_j}{m_j}[\hat{\boldsymbol{p}}_j\hat{A}(\boldsymbol{r}_j,t)+\hat{A}(\boldsymbol{r}_j,t)\hat{\boldsymbol{p}}_j]$$

$$+\sum_j\frac{1}{2}\frac{e_j^2}{m_j}\hat{A}^2(\boldsymbol{r}_j,t) \qquad (1\text{-}8\text{-}5)$$

这样，得到

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}' \qquad (1\text{-}8\text{-}6)$$

式中 $\hat{H}_0$ 表示原子和光场的哈密顿算符，$\hat{H}'$ 表示光与原子相互作用的哈密顿算符。下面讨论 $\hat{H}'$，由量子力学，算符 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的对易关系为

$$\hat{\boldsymbol{p}}_j\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}_j,t)-\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}_j,t)\hat{\boldsymbol{p}}_j=-\mathrm{i}\hbar\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}_j,t) \qquad (1\text{-}8\text{-}7)$$

因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，所以 $\hat{H}'$ 可表示为

$$\hat{H}'=-\sum_j\frac{e_j}{m_j}\hat{\boldsymbol{p}}_j\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}_j,t)+\frac{1}{2}\sum_j\frac{e_j^2}{m_j}\hat{\boldsymbol{A}}^2(\boldsymbol{r}_j,t) \qquad (1\text{-}8\text{-}8)$$

取电偶极近似，则上式中最后一项可忽略；如果原子尺度比光波长小，则可将矢势 $A(\boldsymbol{r}_j,t)$ 按坐标 x_0（例如第 j 个原子的重心）展开，为了简单，取此点为坐标原点，$x_0=0$，于是在展开式中忽略高次项，则得到

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_j,t)\simeq\boldsymbol{A}(0,t) \qquad (1\text{-}8\text{-}9)$$

为了简单，以下不再标记 $\boldsymbol{A}$ 中的宗量，这样，由(1-8-8)式得到

$$\hat{H}'=-\hat{\boldsymbol{A}}\sum_j\frac{e_j\hat{\boldsymbol{P}}_j}{m_j} \qquad (1\text{-}8\text{-}10)$$

如果忽略普通的动力学动量与正则动量之间的区别，由(1-8-2)式得到：

$$m_j\dot{\boldsymbol{x}}_j\simeq\hat{\boldsymbol{P}}_j \qquad (1\text{-}8\text{-}11)$$

代入(1-8-10)式，最后得到光与原子相互作用的哈密顿算符 $\hat{H}'$ 为

$$\hat{H}' = -\hat{A}\cdot\dot{\hat{\mu}} \tag{1-8-12}$$

式中
$$\dot{\hat{\mu}} = \sum_j e_j \dot{\hat{x}}_j \tag{1-8-13}$$

(1-8-12)式表示的相互作用哈密顿算符,可以有以下两种具体情形:

(1) 在半经典理论中,因为认为光的电磁场服从经典电动力学中的麦克斯韦方程组,所以(1-8-12)式中的矢势算符 $\hat{A}$ 即为矢势函数 A 自身,这样,在半经典理论中,$\hat{H}'$ 为

$$\hat{H}' = -A\dot{\hat{\mu}} \tag{1-8-14}$$

式中的 $\dot{\hat{\mu}}$对于二能级原子,可采用赝自旋算符表示。使用(1-8-14)式,可以在半经典理论范围,讨论二能级原子与光相互作用现象,例如,第二章讨论狄克超辐射时,将使用(1-8-14)式表示的 $\hat{H}'$。

(2) 在全量子理论中,光场被量子化,(1-8-12)式中的矢势算符 $\hat{A}$ 由光子的产生算符和湮没算符表示,将(1-7-39)式代入(1-8-12)式,得到矢势算符表示的全量子理论中的 $\hat{H}'$ 为

$$\hat{H}' = -\sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0 V}}\boldsymbol{u}_l\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l^+(t)\right]\dot{\hat{\mu}} \tag{1-8-15}$$

对于二能级原子,可以用赝自旋算符或者由它们组成的上升、下降算符表示 $\dot{\hat{\mu}}$,这样形式的光与二能级原子相互作用哈密顿算符,最早被简斯-库明斯(Janes-Cummings)研究过,用它可以建立全量子理论中有关算符的方程,例如,第二章讨论超荧光现象时,将使用(1-8-15)式表示 $\hat{H}'$。

上面是采用光的电磁场的矢势 A 表示 $\hat{H}'$,现在讨论使用光的电场强度 E,表示光与原子相互作用哈密顿算符 $\hat{H}'$。首先讨论半经典理论情形,这时的 $\hat{H}'$ 我们曾在§1-6 中使用过,其形式如(1-6-19)式所示,为

$$\hat{H}' = -E\cdot\hat{\mu} \tag{1-8-16}$$

对于全量子理论的情形，上式中的 $\boldsymbol{E}$ 是量子化的，要用光的电场强度算符 $\hat{\boldsymbol{E}}$ 表示(1-8-16)式，将(1-7-40)式代入，则得到

$$\hat{H}' = -\hat{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\mu}$$

$$= -\mathrm{i}\sum_{l}\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\boldsymbol{u}_l[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l^{\dagger}(t)]\hat{\mu} \quad (1\text{-}8\text{-}17)$$

式中的 $\hat{\mu}$，对于二能级原子同样可以用赝自旋算符或者上升、下降算符表示，这样仍可以建立光与二能级原子相互作用的全量子理论方程，例如，在第四章讨论光学双稳性时，将使用(1-8-17)式表示的 $\hat{H}'$。

光与原子相互作用哈密顿算符的具体形式，不止这里讨论的四种，在本书最后一章研究量子光学中全量子理论形式时，还要讨论这一问题。

参考文献

[1] Allen L and Eberly J H . Optical Resonance and Two-Level Atoms. John Wiley & Sons New Youk,1975

[2] Heitler W. The Quantum Theory of Radiation. 3rd ed,Oxford University Press London,1954

[3] Louisell W H. Quantum statistical Properties of Radiation. Wiley, New York. 1973

[4] Jaynes E T, and Cummings F W. Proc. IEEE,Vol 51,1963, 89

第二章　原子合作发光

本章讨论原子群的合作自发辐射问题，主要研究狄克(R. H. Dicke)超辐射和超荧光。首先介绍关于原子群合作辐射的一般概念，然后在半经典理论范围讨论狄克超辐射的基本特点。在超荧光方面，首先讨论有关的基本概念和分析原始实验，在全量子理论范围建立平均场理论方程，并用以讨论超荧光的基本特点。最后讨论双色超荧光现象。

§2-1　原子群的合作自发辐射

1954年狄克首先从理论上提出原子超辐射发光的机制；1975年意大利的包尼法乔(R. Baonifacio)和鲁基雅多(L. A. Lugiato)从理论上提出原子产生超荧光的机制。狄克超辐射和超荧光，从发光机制来看，均属于原子群的合作自发辐射。它们不同于一般的辐射，特征是总的辐射几率增加，发光强度与发光的原子数平方成正比，并有很好的方向性和相干性。

先来讨论原子群合作自发辐射时总的辐射几率增加问题。设想两个发光的原子为两个点光源，由物理光学可知，若这两个点光源发的光同位相，当它们之间距离很远时，在屏上可观察到亮、暗条纹。为维持两个点光源发光的总亮度不变，根据能量守恒定律，可以认为这时的暗条纹的亮度用来加强亮条纹的亮度了。但是，随着这两个点光源之间的距离不断缩小，直至小于二分之一波长时，这时在屏上看到的则全是亮的，不再出现暗条纹。由于这时不出现暗条纹，所以亮条纹处的亮度不能再理解为从暗条纹处来的，而是

由于两个点光源靠的很近，它们发出光又相干，这样，亮度增加了。可见，相距很近的两个点光源自发发光的几率比孤立的点光源的自发发光几率增加。这可以推广到多个原子发光的情形。此外，由物理光学可知，这种辐射的最大亮度在两个点光源联线的中垂线方向上，可见有很好的方向性，而原子的普遍自发发光是充满 4π 立体角空间的。

两个孤立原子相距很近时，也可能出现发光的自陷现象。若上述的两个点光源发出的光在位相上相差 π，则由物理光学知道，当这两个点光源相距较远时，其发光情况与它们单独发光情形相同，随着它们之间的距离减少，则由于相干，在屏上观察不到任何亮纹，表明都不发光了，称此为发光的“自陷”。对于两个原子发光情形来说，这个过程则很容易理解。这是因为若其中一个原子处于激发态，而相距很近的另一个原子处于基态的话，前者若从激发态跃迁到基态，发射出一个光子，此时恰被处于基态的原子所吸收而跃迁到激发态。这样，光子虽然由一个原子辐射出来，但却被另一个相距很近的原子所吸收，只是激发态与基态在两个原子之间转移，所以在屏上观察不到光。对于大量的相距很近的原子，也存在这种发光的自陷状态。

现在讨论原子合作辐射光的方向性。人们知道，光子的统计有起伏或涨落现象，对于黑体辐射源，由玻色-爱因斯坦统计分布律可以求出一种光子状态或一个光模式的平均光子数 $\bar{\delta}$ 为

$$\bar{\delta} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{2-1-1}$$

式中 ν 为热光源的光频率，T 为热光源的绝对温度，h 和 k 分别为普朗克常数和玻耳兹曼常数，$\bar{\delta}$ 又称为热光源的光子简并度。光源在体积 V 中的平均光子数 $\bar{n}$ 可表示为光子状态数 g 与光子简并度的乘积

$$\bar{n} = g\bar{\delta}$$

光子状态数 g 为

$$g = \frac{8\pi\nu^2\Delta\nu}{c^3}V \tag{2-1-2}$$

将(2-1-1)和(2-1-3)式代入，则得到

$$\bar{n} = \frac{8\pi\nu^2\Delta\nu V}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \tag{2-1-3}$$

任一瞬间的光子数 n，可以比平均值 $\bar{n}$ 大或小，虽然它们之间的偏差 $\Delta n = n - \bar{n}$ 可以不为零，但是在观察时间内偏差 Δn 的平均值 $\overline{\Delta n}$ 为零，即

$$\overline{\Delta n} = \overline{n - \bar{n}} = \bar{n} - \bar{n} = 0 \tag{2-1-4}$$

所以用偏差 Δn 的平方平均值即均方偏差表示光子数的起伏或涨落，$\overline{\Delta n^2}$ 为

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{(n - \bar{n})^2} \tag{2-1-5}$$

根据关于能量均方偏差 $\overline{(\Delta E)^2}$ 的爱因斯坦-否勒(Einstein-Fowler)公式

$$\overline{(\Delta E)^2} = kT^2\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \tag{2-1-6}$$

可以求出热光源的 $\overline{\Delta n^2}$ 表示式。由黑体辐射的普朗克公式，在体积 V 中的辐射能量为

$$E\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{V}{e^{h\nu/kT}-1}\mathrm{d}\nu \tag{2-1-7}$$

代入(2-1-6)式，得到

$$\overline{(\Delta E)^2} = kT^2\frac{8\pi h^2\nu^4 V}{c^3}\frac{e^{h\nu/kT}}{kT^2(e^{h\nu/kT}-1)^2} \tag{2-1-8}$$

又因为

$$\overline{(\Delta E)^2} = \overline{\Delta n^2}h^2\nu^2 V \tag{2-1-9}$$

将上式代入(2-1-8)式左端，并使用(2-1-3)式，得到：

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n}\left(\frac{e^{h\nu/kT}}{e^{h\nu/kT}-1}\right) \tag{2-1-10}$$

也就是

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n}\left(1 - \frac{\bar{n}}{g}\right)$$

$$= \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{g} \tag{2-1-11}$$

式中 g 表示光子状态数，右端的第一项来自光的微粒性，第二项来自光的波动性。正是由于第二项的存在，相同状态或从同一个光源发出的光子流才表现出起伏。就是说，如果一个光子已经在一种状态中，则另一个光子也处于这一组相空间坐标。它意味着相同状态的光子有凝聚在一起的趋势。所以，光子的这种聚束效应来自 $\bar{n}^2/g$，它与玻色-爱因斯坦分布律有关。

汉布利、布朗和推斯（Hanbury-Brown-Twiss）最先完成了光子的相关起伏实验。他们的原意是利用光的强度相关起伏原理，观

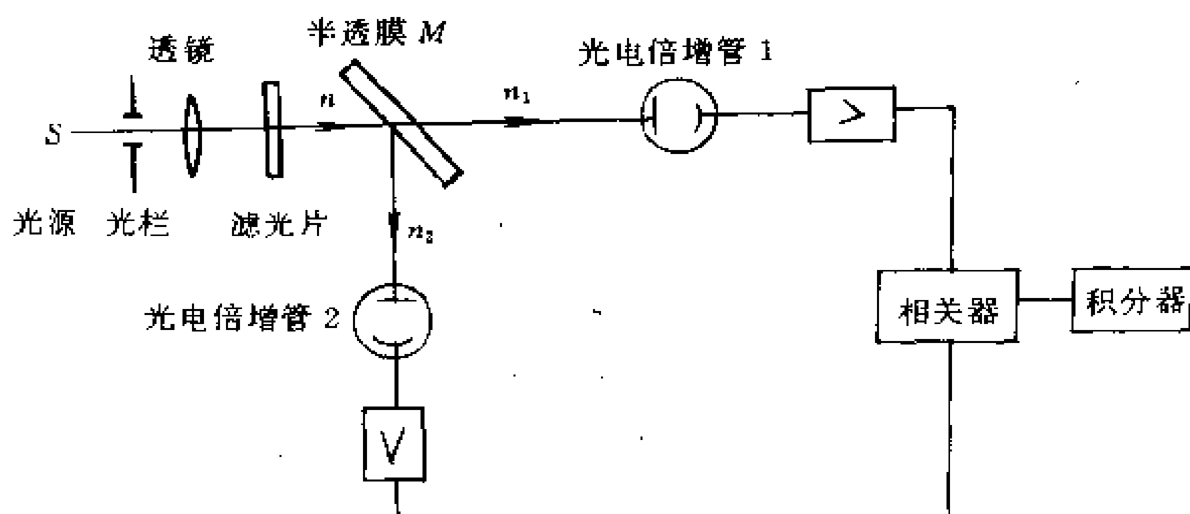


图 2-1-1　光的强度相关起伏实验

测远方星体的直径。图 2-1-1 是实验的方框示意图。光源 s 进入实验系统的光子数为 n，经半反半透镜 M 后，分开为 n_1 和 n_2 分别进入光电倍增管 1 和 2，它们的光电流经放大后，进入相关器，最后累积光电流的相关起伏。实验结果表明，两个光电倍增管的光电流起伏存在一定的相关性。我们用前边得到的公式，对这个实验作些讨论。在这个实验里

$$n = n_1 + n_2$$

代入(2-1-11)式得到

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n}_1 + \frac{\bar{n}_1^2}{g} + \bar{n}_2 + \frac{\bar{n}_2^2}{g} + \frac{2\bar{n}_1\bar{n}_2}{g} \tag{2-1-12}$$

而

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{\Delta n_1^2} + \overline{\Delta n_2^2} + 2\,\overline{\Delta n_1 \Delta n_2} \tag{2-1-13}$$

比较以上二式并使用(2-1-11)式，得到

$$\overline{\Delta n_1 \Delta n_2} = \frac{\bar{n}_1 \bar{n}_2}{g} \tag{2-1-14}$$

实验表明，对于不同光源发出的光，分别进入两个光电倍增管的情形，两个光电流信号并不相关，即$\overline{\Delta n_1 \Delta n_2}=0$；对于上述实验中的同一个光源产生的光，分别进入两个光电倍增管情形，两个光电流表现出相关起伏，同前者比较，相关器上增加了$\overline{\Delta n_1 \Delta n_2}=\bar{n}_1\bar{n}_2/g$这么多的符合信号。这就是我们前边讨论的同一光源发出的光子或处于相同量子状态的光子有凝聚在一起的趋势。它来源于(2-1-11)式右端的第二项$\bar{n}^2/g$，与光子的玻色-爱因斯坦分布有关。

这样，当一个笔形的细长工作物质的原子产生合作辐射时，第一个光子沿轴向方向辐射出去后，由于光子的聚束效应，第二个光子也将沿第一个光子的方向辐射出去，如此下去，许多光子将沿着这个可能性最大的方向辐射，在空间上形成定向性很好的光辐射。

最后要指出的是，激光的光子简并度虽然非常高，但是激光的光子统计服从泊淞分布律，所以相关起伏为零。

§2-2 狄克超辐射

1954年狄克(R. H. Dicke)从理论上预言原子、分子群存在着现在人们通常称之为狄克超辐射的发光机制。狄克预言的原子群合作辐射，有关的概念已在上面介绍过。先来讨论相干激发问题。为了实现狄克超辐射，必须克服原子群往往并不集中在波长尺度的空间的限制，同时还要使各个发光原子发光的初位相保持一定

的关系。为满足上述要求，首先要对原子群系统进行相干激发，例如可以使用激光激发原子体系，使它们进入激发态，从而保持相互间的位相关系。这样，当原子群合作辐射时，就产生方向性很好的相干自发辐射。光子回波实验属于这一类。实际上，采用激光泵浦的染料激光器，它输出的激光中，原子合作辐射占有相当部分。

当工作物质原子系统在外界相干激发作用下，原子群进入激发态并保持相互的相位关系，整个工作物质先形成宏观电极化强度，它随时间变化，产生狄克超辐射。对于狄克超辐射不仅可以在辐射的量子理论范围内讨论，由上述过程可见，也可以在经典理论或半经典理论范围内讨论。下边我们将采用半经典理论讨论狄克超辐射。狄克超辐射的特点，如同所有的原子合作辐射的特点一样，它的光强度正比于发光原子数的平方，它的脉冲持续时间与发光原子数成反比。

为了从理论上研究狄克超辐射，首先来讨论产生狄克超辐射的原子群，假设原子群是由 N 个二能级原子组成的。对于 N 个二能级原子体系，可以在第一章讨论的基础上，引入总的赝自旋算符 $\hat{J}$ 来描写它们的运动，它定义为

$$\hat{J} = \sum_{n=1}^{N} \hat{j}_n \tag{2-2-1}$$

$$\hat{J}_1 = \sum_{n=1}^{N} \hat{j}_{1n}, \qquad \hat{J}_2 = \sum_{n=1}^{N} \hat{j}_{2n}, \qquad \hat{J}_3 = \sum_{n=1}^{N} \hat{j}_{3n} \tag{2-2-2}$$

上式中的 $\hat{j}$ 是描写一个二能级原子运动的赝自旋算符：

$$\hat{j}_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{j}_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{j}_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \tag{2-2-3}$$

按泡利算符性质，它们服从下列对易关系：

$$\hat{j} \times \hat{j} = \mathrm{i}\hat{j} \tag{2-2-4}$$

$$[\hat{j}_1, \hat{j}_2] = \mathrm{i}\hat{j}_3, \qquad [\hat{j}_2, \hat{j}_3] = \mathrm{i}\hat{J}_1, \qquad [\hat{j}_3, \hat{j}_1] = \mathrm{i}\hat{j}_2 \tag{2-2-5}$$

因此，相应地有

$$\hat{J} \times \hat{J} = \mathrm{i}\hat{J} \quad (2\text{-}2\text{-}6)$$

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = \mathrm{i}\hat{J}_3, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = \mathrm{i}\hat{J}_1, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_1] = \mathrm{i}\hat{J}_2 \quad (2\text{-}2\text{-}7)$$

根据角动量算符性质，在 $\hat{J}_3$ 和 $\hat{J}^2$ 对角化的表象中，如用 l 和 j 分别表示算符 $\hat{J}_3$ 和 $\hat{J}^2$ 的量子数，由量子力学可知

$$\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2 + \hat{J}_3 \quad (2\text{-}2\text{-}7)$$

$$\langle l, j | \hat{J}^2 | l, j \rangle = j(j+1) \quad (2\text{-}2\text{-}8)$$

$$\langle l, j | \hat{J}_3 | l, j \rangle = l \quad (2\text{-}2\text{-}9)$$

$$\langle l, j | \hat{J}_1 + \mathrm{i}\hat{J}_2 | l-1, j \rangle = \langle l-1, j | \hat{J}_1 - \mathrm{i}\hat{J}_2 | l, j \rangle = \sqrt{(j+l)(j-l+1)} \quad (2\text{-}2\text{-}10)$$

$$\langle l, j | \hat{J}_1 | l-1, j \rangle = \langle l-1, j | \hat{J}_1 | l, j \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(j+l)(j-l+1)} \quad (2\text{-}2\text{-}11)$$

$$\langle l, j | \hat{J}_2 | l-1, j \rangle = -\langle l-1, j | \hat{J}_2 | l, j \rangle = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{(j+l)(j-l+1)} \quad (2\text{-}2\text{-}12)$$

现在在半经典理论范围研究 N 个二能级原子与光场的相互作用。整个系统的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_L + \hat{H}' \quad (2\text{-}2\text{-}13)$$

式中 $\hat{H}_a$ 为二能级原子的哈密顿算符，$\hat{H}_L$ 为光场的哈密顿算符，$\hat{H}'$ 为光与二能级原子相互作用哈密顿算符。一个二能级原子的哈密顿算符为

$$\hat{H}_a = \hbar\omega_0 \hat{j}_3 \quad (2\text{-}2\text{-}14)$$

因为算符 $\hbar\omega_0\hat{j}_3$ 和 $\hat{H}_a$ 有相同的本征值 $\hbar\omega_0/2$ 和 $-\hbar\omega_0/2$，ω_0 由关系 $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$ 决定，E_2 和 E_1 分别是二能级原子高能态和低能态能量。任意取能量计算原点时，此处取原子的基态能量为 $-\hbar\omega_0/2$。

若光场有 λ 个光模式，则光场的哈密顿算符 $\hat{H}_L$ 可表示为

$$\hat{H}_L = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \hat{b}_\lambda^+ \hat{b}_\lambda \quad (2\text{-}2\text{-}15)$$

光与二能级原子相互作用哈密顿算符 $\hat{H}'$ 在半经典理论中的表示式，由第一章的(1-8-14)式为

$$\hat{H}' = -\boldsymbol{A}\cdot\dot{\hat{\mu}} \tag{1-8-14}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为光场的矢势，$\dot{\hat{\mu}}$ 为二能级原子的电偶极算符对时间的微商。现在建立 $\dot{\hat{\mu}}$ 的表示式。人们知道，任意二行二列算符 $\hat{O}$ 可表示为

$$\hat{O} = q\hat{I} + \boldsymbol{b}_1\hat{j}_1 + \boldsymbol{b}_2\hat{j}_2 + \boldsymbol{b}_3\hat{j}_3 \tag{2-2-16}$$

式中 $\hat{I}$ 是具有二行二列元素的单位矩阵

$$\hat{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{2-2-17}$$

所以，$\dot{\hat{\mu}}$ 可表示为

$$\dot{\hat{\mu}} = q\hat{I} + \boldsymbol{e}_1\hat{j}_1 + \boldsymbol{e}_2\hat{j}_2 + \boldsymbol{e}_3\hat{j}_3 \tag{2-2-18}$$

设 μ 随时间简谐变化，频率为 ω_0，则得到 $\dot{\hat{\mu}}$ 的四个矩阵元素为

$$\dot{\mu}_{11} = 0 = \boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3 \tag{2-2-19}$$

$$\dot{\mu}_{22} = 0 = \boldsymbol{q} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3 \tag{2-2-20}$$

$$\mathrm{i}\omega_0\mu_{12} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2) \tag{2-2-21}$$

$$-\mathrm{i}\omega_0\mu_{21} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2) \tag{2-2-22}$$

由(2-2-19)和(2-2-20)式得到

$$\boldsymbol{q} = 0, \qquad \boldsymbol{e}_3 = 0 \tag{2-2-23}$$

代回(2-2-18)式得到

$$\dot{\hat{\mu}} = \boldsymbol{e}_1\hat{j}_1 + \boldsymbol{e}_2\hat{j}_2 \tag{2-2-24}$$

对于 N 个二能级原子，按(2-2-1)式引入 $\hat{J}$，则由(2-2-24)式和(1-8-14)式，最后得到 N 个二能级原子与光场相互作用的哈密顿算符为

$$\hat{H}' = -\boldsymbol{A}(0)(\boldsymbol{e}_1\hat{J}_1 + \boldsymbol{e}_2\hat{J}_2) \qquad (2\text{-}2\text{-}25)$$

式中认为原子系统尺度比光的波长小，矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 对原子的质量中心关系可忽略，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 可表示为 $\boldsymbol{A}(0)$。

由(2-2-14)(2-2-15)和(2-2-25)式，最后得到光场与 N 个二能级原子组成的系统总哈密顿算符为

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{J}_3 + \sum_{\lambda}\hbar\omega_\lambda\hat{b}_\lambda^+\hat{b}_\lambda - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{e}_1\hat{J}_1 + \boldsymbol{e}_2\hat{J}_2) \qquad (2\text{-}2\text{-}26)$$

由(2-2-11)和(2-2-12)式，相互作用哈密顿算符 $\hat{H}'$ 的跃迁矩阵元为

$$\langle j,l|\boldsymbol{e}_1\hat{J}_1 + \boldsymbol{e}_2\hat{J}_2|j_1 l \mp 1\rangle = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1 \pm \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2)[(j \pm l)(j \mp l + 1)]^{1/2} \qquad (2\text{-}2\text{-}27)$$

状态之间的跃迁几率正比于跃迁矩阵元素的平方，为

$$I = I_0(j + l)(j - l + 1) \qquad (2\text{-}2\text{-}28)$$

式中 I_0 为由单个原子构成的气体的辐射速率。(2-2-28)式表明，若 $l=j=1/2$ 时，则有

$$I \propto N \qquad (2\text{-}2\text{-}29)$$

N 是原子数目，若 j 非常大，l 非常小，例如 $j=N/2$，$l=0$ 时，因 l 是 $\hat{J}_3$ 的量子数，这种情形相当于原子系统的高能级和低能级上的粒子数相等，则由(2-2-28)式得到

$$I = \frac{1}{2}I_0N(\frac{1}{2}N + 1) \qquad (2\text{-}2\text{-}30)$$

也就是

$$I \propto N^2 \qquad (2\text{-}2\text{-}31)$$

得到了发光强度与发光原子数平方成正比的结果。

现在讨论狄克超辐射的光谱线线型和频宽。由量子力学知道，量子数 j 与分量的量子数 l 之间可表示为

$$l = j\cos\phi \qquad (2\text{-}2\text{-}32)$$

式中 ϕ 为极化轴与 z 轴之间夹角，由(2-2-28)式，I 可表示为

$$I = I_0(j + l)(j - l + 1)$$

$$\simeq I_0(j^2 - l^2)$$

$$= I_0 j^2 \sin^2\phi \tag{2-2-33}$$

另方面，原子的能量为

$$lW = jW\cos\phi \tag{2-2-34}$$

它随时间的变化率为

$$-jW\sin\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{2-2-35}$$

原子的辐射速率应与能量损耗相平衡，由(2-2-33)与(2-2-35)式得到

$$jW\sin\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = I_0 j^2 \sin^2\phi \tag{2-2-36}$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{I_0 j}{W}\sin\phi \tag{2-2-37}$$

假设初始时刻 $t=0$，$\phi=90°$，则上式解为

$$\sin\phi = \mathrm{sech}\, j\beta t \tag{2-2-38}$$

式中

$$\beta = \frac{I_0}{W} \tag{2-2-39}$$

若 $t=0$ 时，$\phi(0)=\phi_0$，则(2-2-37)式的解为

$$\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{\phi_0}{2}\mathrm{e}^{j\beta t} \tag{2-2-40}$$

将它代入(2-2-33)式，得到

$$I = \frac{4j^2 I_0}{\left[\mathrm{e}^{j\beta t}\mathrm{tg}\,\frac{\phi_0}{2} + \mathrm{e}^{-j\beta t}\mathrm{ctg}\,\frac{\phi_0}{2}\right]^2} \tag{2-2-41}$$

光场为

$$E(t) \propto \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_a t}\sin\phi, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{2-2-42}$$

所以(2-2-41)式的傅利叶变换式为

$$I(\omega) \propto \left| \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_a - \omega)t}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{j\beta t}\mathrm{tg}\,\frac{\phi_0}{2} + \mathrm{e}^{-j\beta t}\mathrm{ctg}\,\frac{\phi_0}{2}} \right|^2 \tag{2-2-43}$$

由上式可以给出狄克超辐射光谱线的线型和频宽，表明狄克超辐射的线型不是普通的洛仑兹线型形式。半强度点对应的频宽为[1,2]，

$$\Delta\omega = aj\beta \tag{2-2-44}$$

当 ϕ_0 位于 $0,\pi$ 区间，上式中的 a 取值 1 到 2。

当 $\phi_0 = 90°$时，$\Delta\omega$ 为

$$\Delta\omega = 1.12j\beta$$

若 $j = N/2$，即狄克超辐射强度最大时的 $\Delta\omega$ 为

$$\Delta\omega = 1.12\beta\frac{N}{2} \tag{2-2-45}$$

由此可知，狄克超辐射脉冲的持续时间正比于 $1/N$。

1963 年，狄克在上述讨论的基础上，提出了相干自发辐射激射器的设想方案。设如图 2-2-1 所示的工作物质长为 L，宽为 A，L

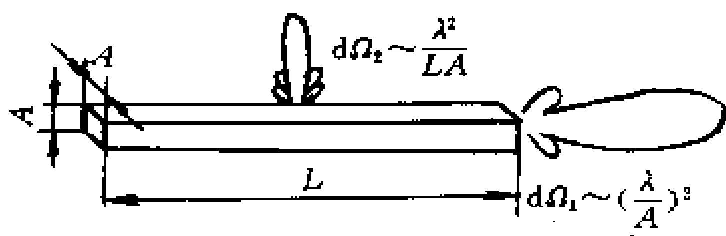


图 2-2-1 相干自发辐射激射器

$\gg A$，两个端面无正反馈。当相干激发该工作物质时，根据以上分析，可将工作物质的粒子看作为很多点光源，这时它们的自发辐射是相干的，发光的方向应集中在由这些点光源决定的端面所张的立体衍射 $d\Omega_1$ 内，这是因为 $d\Omega_1 \sim (\lambda/A)^2$ 大于侧面所张的立体衍射角 $d\Omega_2 \sim \lambda^2/LA$。所以工作物质内头一个光子从 $d\Omega_1$ 发射出的可能性最大，当第一个光子辐射出来后，根据聚束效应，第二个光子也将向第一个光子的方向辐射出去，如此下去，使这个方向成为可能性最大的辐射方向。这样，能够得到一个空间上定向性很好，时间上可以短到反比于 N、强度上正比于 N^2 的超辐射脉冲。

下面我们来讨论在实验上已经观察到的在相干激发作用下工

作物质产生脉冲辐射现象，即光子回波现象。1964 年人们用红宝石激光器输出的脉冲激光，相干激发作为共振介质的红宝石晶体，观察到光子回波现象。实验是先用 $\pi/2$ 激光脉冲($\Theta(t)=\pi/2$)通过共振吸收介质，经过时间间隔 $\Delta t<T_2$，T_1 后(T_1 和 T_2 分别为共振介质的纵向弛豫时间和横向弛豫时间)，再以 π 激光脉冲($\Theta(t)=\pi$)通过共振吸收介质，在第二个激光脉冲通过共振介质约 Δt 时间，共振介质将在空间的某确定方向上辐射出第三个光脉冲，这就是光子回波。

原始的光子回波实验用的激发源是调 Q 的红宝石激光器，红宝石激光器的激光脉宽约 10—20ns 激光波长 $\lambda=694.3$nm。上述的 $\pi/2$ 激光脉冲和 π 激光脉冲的时间间隔大约 40—100ns。选择红宝石晶体作为共振吸收介质，并将它冷却到液氮温度，目的是增大 T_1 和 T_2。自从第一个光子回波实验公布以来，至今人们已经在很多物质中观察到光子回波现象。

实际上，最早的回波现象是在核磁共振研究中观察到的自旋回波现象。

为了分析光子回波实验，先来讨论 π 脉冲和 $\pi/2$ 脉冲的基本性质。由光学布洛赫方程(1-6-59)—(1-6-61)式，当共振作用时，$\delta=0$，若 $E_a=\mathscr{E}_0$(常数)，如图 1-6-2 所示，为了简单，不考虑这些方程中的衰减项，则上述方程变为(1-6-62)—(1-6-64)式。若初始时刻 $\zeta(0)=-1$，$\eta(0)=0$，即原子处于基态，则在 Δt 时间后，当

$$\Theta(t) = \alpha_a\mathscr{E}_0\Delta t = \pi \tag{2-2-46}$$

由(1-6-70)式看出，这时

$$\zeta = +1 \tag{2-2-47}$$

表明原子被激发到高能态，这时的光脉冲称为 π 脉冲，就是如图 1-6-2 所示的方波。所以常说在 π 脉冲作用下，可将原子激发到高能态。如果 $\Theta(t)=\pi/2$，在 $\eta(0)=0$ 时，由(1-6-70)式看出，

$$\zeta = 0 \tag{2-2-48}$$

所以 $\pi/2$ 脉冲的作用是使共振介质的原子高、低工作能级有相等

的粒子数。

下面我们来定性地分析一下上述光子回波实验的物理过程。首先在 $\pi/2$ 激光脉冲作用下，使共振介质的原子高低能级有相等的粒子数；接着通过 π 脉冲，它的作用是使工作能级粒子数发生反转。但是由于这两个脉冲时间间隔 Δt 甚短，因此在 π 脉冲作用下不会引起原来在高、低工作能级上的粒子数分布有明显的变化。这样，从能量上来看，两个光脉冲并没有同共振介质有明显的能量交换。但是，这里进行的是相干激发，根据上面的分析，在强度上发生最大的狄克超辐射的条件，是高低能级上的粒子数相等的时候。可见 $\pi/2$ 脉冲的作用是造成狄克类型原子合作辐射的最优条件，而 π 脉冲的作用是保持了这个条件。

再从产生原子合作辐射方面看这个实验。在头一个 $\pi/2$ 脉冲作用下，共振介质产生宏观电极化强度。$\pi/2$ 脉冲通过之后，介质的宏观电极化强度并不马上消失，而是随时间衰减(因此伴随有光学自由感应衰减现象)，这是因为介质的各个原子的感应电偶极矩的位相关系，在 T_2 时间内要逐渐消失造成的。在上述弛豫过程没有结束之前，π 脉冲通过介质，它使各个原子的感应电偶极矩之间的失位相过程，正好发生逆转，经过 $\Delta t \simeq T_2$ 后，重新恢复原来的同位相关系，使宏观电极化强度达到最大值，从而辐射第三个光脉冲，即光子回波脉冲。可见，光子回波现象是由于共振介质对通过的光脉冲保持记忆位相的能力造成的。下面用运动员竞赛比喻地说明逆转位相的过程。图 2-2-2(a)表示在同一起跑线上的运动员们，听到出发的枪声($\pi/2$ 脉冲)开始在跑道上比赛，图 2-2-2(b)表示具有不同速度的运动员有前有后的情况，图 2-2-2(c)表示在比赛的过程中忽然又发出一枪声(π 脉冲)，它命令运动员以各自原来的速度向回跑，图 2-2-2(d)表示经过相同的时间，他们同时到达起跑点，这相当于各原子电偶极矩恢复到原来的同位相，宏观电极化强度达到最大，此时产生光子回波。

可以借助光学布洛赫方程讨论光子回波过程。由第一章的

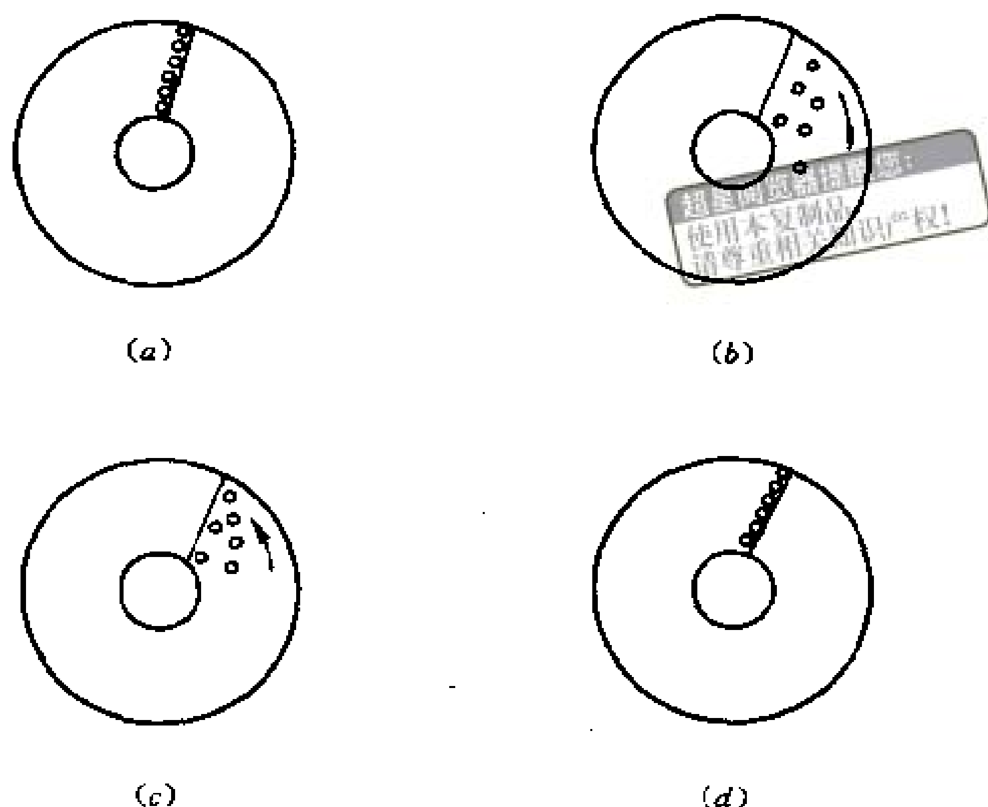


图 2-2-2

(1-6-55)式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{N}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t)$$

式中 $\boldsymbol{\rho}(t)$的三个分量为 $\xi(t)$、$\eta(t)$和 $\zeta(t)$，$\boldsymbol{N}(t)$的三个分量为 $-\alpha_a E_a$、0和 $\omega_{\alpha\beta}-\omega$。借助 $\boldsymbol{\rho}(t)$的进动图象说明光子回波。

当激发的光脉冲进入共振介质前，因介质内没有宏观电极化强度出现，ξ 和 η 分量都为零，原子处于基态，即 $\zeta=1$，这时 $\boldsymbol{\rho}$ 应指向 $-z$ 轴，如图 2-2-3(a)所示。因没有 $\boldsymbol{\rho}$ 的横向分量，宏观电极化强度为零，所以此时介质不辐射光。

当 $\pi/2$ 光脉冲沿 x 轴入射时，如果 $\pi/2$ 光脉冲的光强很大，$E_a \gg \omega_{\alpha\beta}-\omega$，则 $\boldsymbol{N}(t)$由 $\alpha_a E_a$ 分量(即沿 x 轴上的分量)决定，所以 $\boldsymbol{\rho}$ 应对 x 轴旋进 $\pi/2$ 角度，到达 xy 平面，如图 2-2-3(b)所示，此时介质宏观电极化强度具有最大值。

当 $\pi/2$ 光脉冲通过介质后，介质内的 $E_a=0$，此时 $N(t)$ 由它的第三个分量即 $\omega_{\alpha\beta}-\omega$ 决定，所以 ρ 应绕 z 轴作进动运动。由于介质原子谱线的非均匀加宽影响，可按着与 $\omega_{\alpha\beta}$ 比较的大小，将所有原子分为两类，一类是辐射出频率 ω' 的光，$\omega'<\omega$；另一类是辐射出频率为 ω'' 的光，$\omega''>\omega$。实际上 ρ 被分为 ρ' 和 ρ''。在 $\pi/2$ 脉冲经过后，它们分别相对于 ρ 的原来位置旋进 θ 角，如图 2-2-3(c)所示。分左右旋进，是因为一个绕 $+z$ 轴，另一个绕 $-z$ 轴，就目前情况，z 轴就是 $N(t)$ 的方向。

经过 Δt 时间后，沿 x 轴入射 π 脉冲激光，因 E_a 很大，$E_a \gg \omega_{\alpha\beta}-\omega$，$N(t)$ 由 $\alpha_a E_a$ 分量决定，$N(t)$ 轴实际上是 x 轴，所以 ρ 又要绕 x 轴进动 $\theta=\pi$ 角，如图 2-2-3(d)所示。

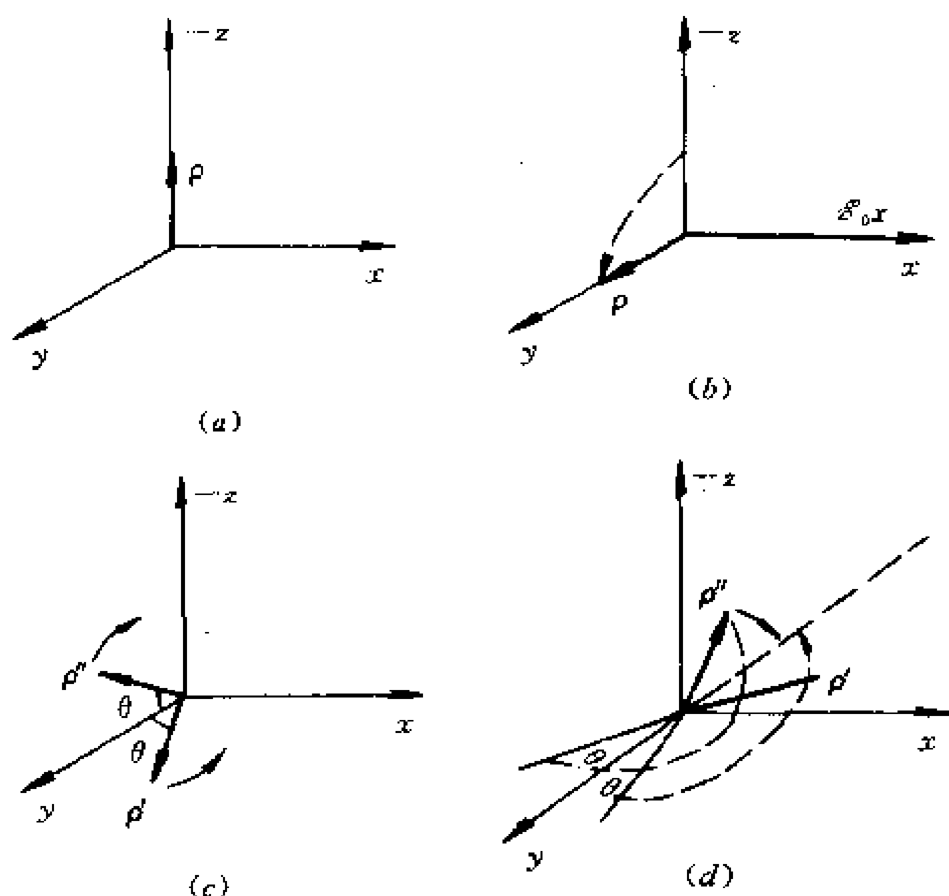


图 2-2-3

当 π 脉冲通过介质后，介质内 $E_a=0$，$N(t)$ 由 $\omega_{\alpha\beta}-\omega$ 分量决

定，$N(t)$轴现在又为$\pm z$轴。ρ'和ρ''分别又绕$\pm z$轴进动，经过Δt时间（$\pi/2$脉冲与π脉冲的时间间隔），旋进θ角，这两部分宏观电极化强度重合，宏观电极化强度恢复到极大值，从而辐射出回波脉冲。上述图象也说明了先用$\pi/2$光脉冲，后用π光脉冲通过共振介质产生光子回波的原因。

通过共振介质的$\pi/2$光脉冲、π光脉冲和产生的光子回波脉冲，在时间上的关系，如图 2-2-4 所示。

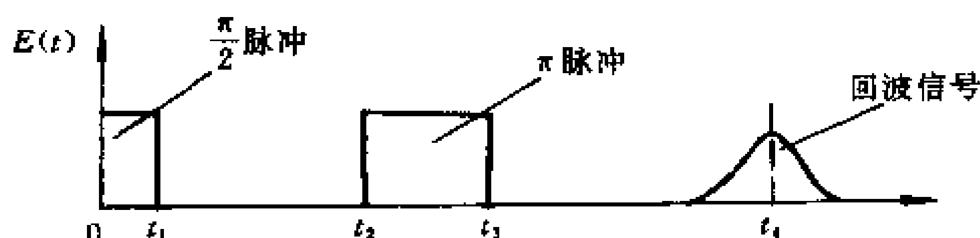


图 2-2-4　产生光子回波的时间序列

§2-3　超　荧　光

关于超荧光问题，起源于狄克超辐射的研究。狄克在 1954 年预言的超辐射，在激光出现后，观察到光子回波现象，这些可称之为极限超辐射，因为在产生这些现象过程中，存储在样品的能量，只有少部分合作地辐射出。1973 年斯克里巴诺维奇（N. Skribanowitz）等人在实验上观察到强超辐射，即存在于样品中的能量几乎全部合作地放出。1975 年包尼法乔和鲁吉雅多等人用他们发展的平均场理论，预言了超荧光现象的存在。1976 年吉布斯（H. M. Gibbs）等人用 Cs 原子射束完成了纯超荧光的实验。至此，量子光学中一个新的研究领域在逐步形成。

这里首先研究超荧光的特征以及它与其它发光机制发出的光的区别，然后讨论纯超荧光和振荡超荧光的特点以及原始实验。

一、超荧光

我们来研究另一种类型的原子合作自发发光现象。若原子体体在外界激发源激发下形成粒子数反转，在高能态原子自发跃迁产生的荧光作用下，原子系统开始形成宏观电极化强度，经过某一延迟后，辐射出一个相干性很好的光脉冲，它的光强度正比于原子数平方，延迟时间正比于$\frac{1}{N}\ln N$，这就是超荧光辐射。

可见，在超荧光情形，原子体系不存在由外界激发造成的初始的宏观电极化强度，整个过程以普通的荧光开始，即过程是由量子噪声为初始而发展起来的原子合作辐射。

现在对各种发光过程作一比较讨论。

荧光　即普通的自发发光，原子发光时彼此无关，发出的光在时间上以指数形式衰减，其寿命只与原子的电子构型有关，荧光强度正比于发光的原子数 N。

激光　为了观察到激光，首先要求原子体系实现粒子数反转分布，处于高能态的原子的自发辐射引起受激辐射，其发光强度正比于发光的原子数 N。

ASE　在粒子数反转分布的原子系统中，高能态原子的自发辐射光被受激辐射过程放大，发光强度正比于发光的原子数。可以看出，ASE 属于激光。

狄克超辐射　这是具有初始宏观电极化强度的合作辐射现象，辐射强度正比于原子数平方，脉冲宽度反比于发光的原子数。它不是以量子噪声作为初始，是从类似于位相天线列阵发出的辐射，所以要求相干激发。可以用经典或半经典理论讨论，而超荧光是量子过程，要用量子理论讨论。

超荧光　这是由宏观大小的样品中发出的合作辐射，发光的原子群由零的初始宏观电极化强度所表征，以标准的自发发光(荧光)作为开始，经过延迟后，原子的合作行为加强，发射速率增加，

在合适的条件下，观察到正比于发光原子数平方的光强度和反比于发光原子数的脉冲时间。从非相干激发结束到发光的这段延迟时间正比于 $\ln N/N$，N 为发光的原子数。

在图 2-3-1 上比较了荧光、狄克超辐射和超荧光这三种自发

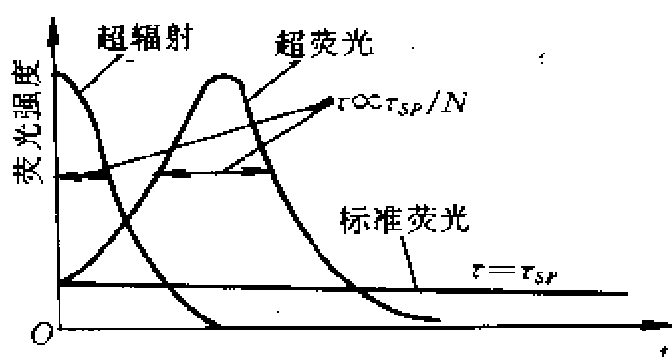


图 2-3-1 超荧光、狄克超辐射和荧光的比较

发光过程。由图可以看出，在 $t=0$ 时刻，对于狄克超辐射，原子体系的宏观电极化强度已经形成，即刻出现狄克超辐射；而在此时刻，对于超荧光，则只出现强度正比于发光原子数 N 的荧光，然后才进入合作辐射。从时间发展过程来看，荧光是指数衰减的。此外，对于超荧光，为了产生合作效应，有明显的阈值，激活介质的长度应小于合作长度。

现在讨论表征超荧光的物理量。发光的原子在初始出现的弱的荧光作用下，它们的电偶极矩相互耦合形成宏观电极化强度的时间，称为超荧光的特征时间 τ_R，如图 2-3-2 所示，τ_R 为

$$\tau_R=\frac{\tau_s}{aN} \tag{2-3-1}$$

式中 τ_s 是孤立原子的寿命时间，对于费涅尔数大于或等于 1 的锥形工作物质，$a=(\lambda/A)^2$，A 是发光物质的截面，λ 是光的波长，(2-3-1)式则为

$$\tau_R=\frac{A^2\tau_s}{N\lambda^2} \tag{2-3-2}$$

现在讨论合作长度 L_c。在辐射过程中，如果一组原子要集体

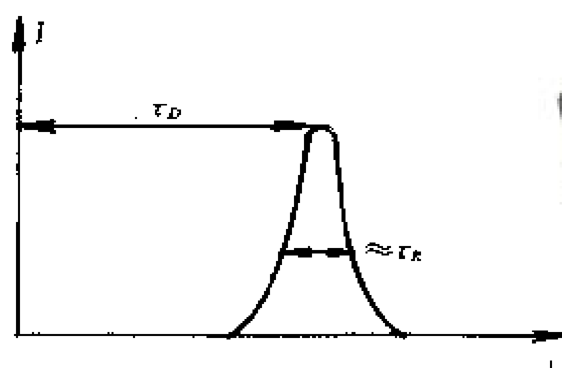


图 2-3-2　超荧光的特征时间

地起作用，则每个原子必须能“感觉”到其它原子辐射出的光场。若两个原子相距太远，就可能是一个被激发的原子还来不及收到其它原子发出的辐射，就已衰减到基态。这样的两个原子是不能够合作的。由此分析可以求出原子发生合作的最大间距，即合作长度 L_c 为

$$L_{max} \equiv L_c = c\tau_R \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

将(2-3-2)式代入，并考虑到原子数 $N=\rho L_c A^2$，ρ 是原子密度，则得到

$$L_c = \sqrt{\frac{c\tau_s}{\lambda^2\rho}} \qquad (2\text{-}3\text{-}4)$$

此外，对于体积比 λ^3 大得多的扩展物质，其 a 为

$$a = \frac{\lambda^2}{8\pi A^2} \qquad (2\text{-}3\text{-}5)$$

于是

$$\tau_R = \frac{8\pi\tau_s}{\lambda^2 L_c \rho} \qquad (2\text{-}3\text{-}6)$$

由此也可求出相应的 L_c 表示式。

再来讨论时间过程的要求。由上述的结果可以看出，为了形成超荧光，要求原子的荧光时间 τ_s 应比超荧光的特征时间 τ_R 长，即 $\tau_R<\pi_s$。此外，为了使超荧光具有很好的相干性，要求 τ_R 应小于原子群的宏观电极化强度的弛豫时间 T_2。而超荧光的延迟时间 t_d，即从外界激发结束到产生超荧光脉冲最大值的时间，应比 τ_R 稍长

些。这样，在时间过程上则有下列要求

$$\tau_R < \tau_D < T_1, T_2 \qquad (2\text{-}3\text{-}7)$$

式中 T_1 为纵向弛豫时间，即 τ_1。此外，为了不破坏正在形成的原子之间的合作辐射，显然要求外界的泵浦时间 t_e 应小于 τ_D：

$$t_e < \tau_D \qquad (2\text{-}3\text{-}8)$$

二、纯超荧光

按合作长度 L_c 可将超荧光分类。当几何长度 $1/2L$ 的工作物质的小信号增益 G 满足下列关系

$$1/G \ll L \ll L_c \qquad (2\text{-}3\text{-}9)$$

时，人们在实验上将得到如图 2-3-2 所示的单脉冲。(2-3-9)式是产生纯荧光的条件，前半个条件要求

$$GL \gg 1 \qquad (2\text{-}3\text{-}10)$$

即要求工作物质要有颇大的增益；后半个条件是确保原子之间的合作。

从时间关系来看，当 $L_c > L$ 时，容易证明作为表征原子体系的一个超辐射态最短衰减时间的合作时间 $t_c = L_c/c$ 小于 τ_R；但它应大于光子从工作物质内逃逸的时间 $t_s = L/c$；后者可以保证不引起正反馈。这样，考虑到(2-3-7)和(2-3-8)式后，得到产生纯超荧光的时间上的条件为

$$\underbrace{t_s < t_c}_{\text{IV}} \underbrace{< \tau_R}_{\text{III}} \underbrace{< \tau_D}_{\text{II}} \underbrace{< T_1, T_2}_{\text{I}} \qquad (2\text{-}3\text{-}11)$$

$$t_s < t_e < \tau_D \qquad (2\text{-}3\text{-}12)$$

下面进一步讨论(2-3-11)式中的条件，I 是要求在整个辐射过程中，保持原子发光的相干性，若原子的弛豫时间小于合作辐射的特征时间，就不能保持辐射体之间的相位相关。条件 II 反映两个事实，一个是发射过程的开始为普通荧光，另一个是超荧光脉冲只能出现在系统内部的合作行为之后。条件 III 是 $\tau_R > t_c$，这个条件等

价于 $L_c > L$，为了证实这一点只须证明 t_R 的另一种表示式

$$\tau_R = \frac{L_c^2}{L_c} \qquad (2\text{-}3\text{-}13)$$

条件Ⅳ要求 $t_c > t_s$，表示与系统无反馈这一要求等价。

吉布斯等人(H. M. Gibbs 和 Q. H. F. Vrehen)在 1976 年首先完成了纯超荧光实验[4]。他们用 Cs 原子射束，在 Cs 原子的 $7P_{3/2} \to 7S_{1/2}$ 的超精细结构的子能级之间跃迁产生超荧光，波长 $\lambda \simeq 2.9\mu m$。激发在 Cs 原子的 $6S_{1/2} \to 7P$ 能级之间进行，整个过程如图 2-3-3 所示。实验以染料激光器作激发源，峰值功率为数千瓦，泵浦时间 $t_e \sim 2ns$。原子吸收体盛放在长度为 1—10cm、温度为 30—100℃的炉内，喷射出来，形成射束，出口为 $0.5 \times 3mm^2$。样品盒和射束都是菲涅尔数约等于 1 的细柱形。射束的长度在 1.3 到 3.5cm 之间变化，实验布局如图 2-3-4 所示，该实验恰好满足产生纯超光的时间(2-3-11)式和(2-3-12)式

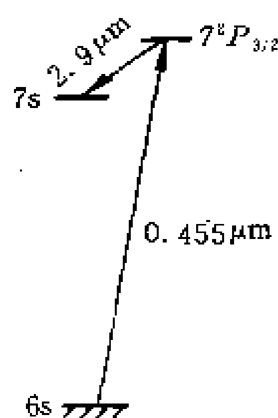


图 2-3-3 铯原子能级图

t_s	t_c	τ_R	τ_D	T_1	T_2	
0.067	0.18	0.5	10	70	80	ns

t_s	t_e	τ_D	
0.067	2	10	ns

在垂直于 Cs 原子射束运动方向上，在不同的 Cs 原子密度时观测到的纯超荧光波形如图 2-3-5。实验表明，纯超荧光光强 $I \propto \mathrm{sech}^2\left(\frac{t-\tau_D}{2\tau_R}\right)$，$\tau_D \sim \tau_R \ln N$，如图 2-3-6。光强的空间分布有横向效应。

三、振荡超荧光

当小信号增益系数 G 满足下列关系

$$1/G \ll L \simeq L_c \qquad (2\text{-}3\text{-}14)$$

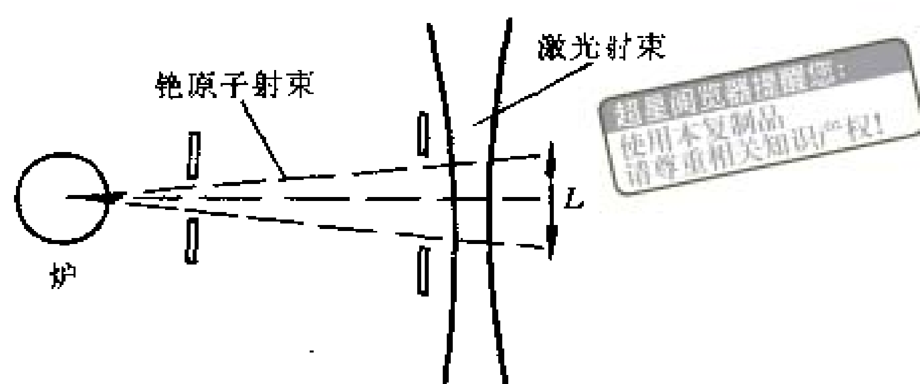


图 2-3-4　纯超荧光实验

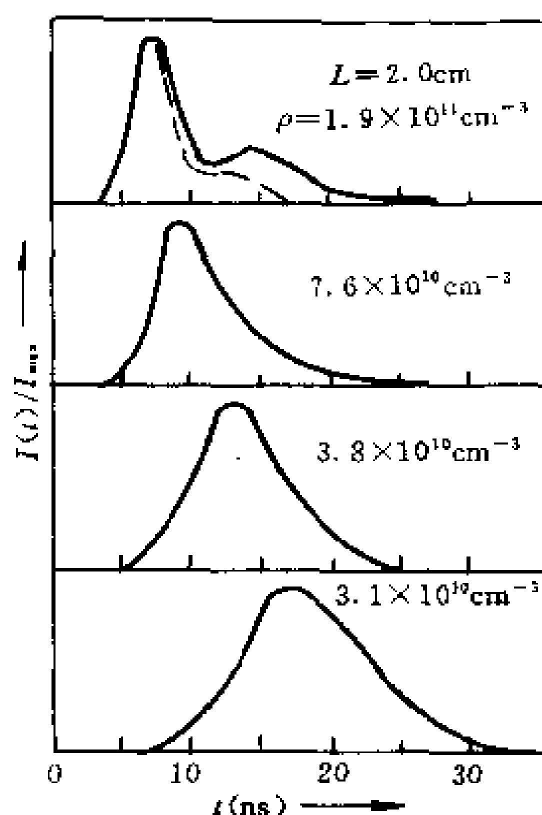


图 2-3-5　不同密度时的纯超荧光波形

时，由于光场自身的传播，引起再激发，在实验上将观察到带有振荡部分的超荧光脉冲。

1973 年首先在 HF 分子气体中观察到振荡超荧光[5]，实验装置如图 2-3-7 所示。以 HF 分子气体激光器作激发源，入射到 HF 盒的激光峰值功率密度为数千瓦/厘米^2，激光脉冲的脉宽为 200

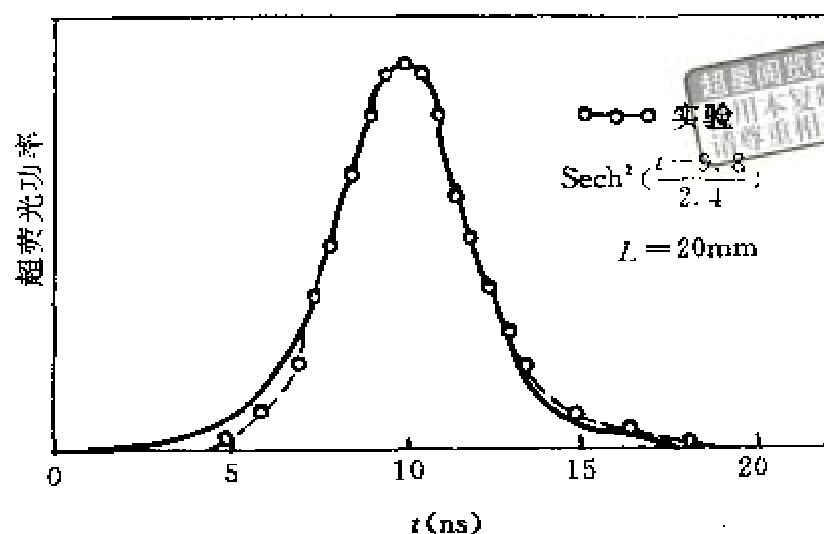


图 2-3-6　纯超荧光脉冲波形



图 2-3-7　观测 HF 分子气体的振荡超荧光装置

~400ns，波长 $\lambda \simeq 2.5\mu m$。装有 HF 气体的不锈钢样品盒，两侧带有硅布鲁斯特窗。液氮冷却的 In-Ge 作为探测器。激发是在 HF 分子的振转能级 $v=0 \to v=1$ 之间进行，结果在 $(v=1, J) \to (v=1, J-1)$ 的转动跃迁上观察到波长为 252、126、84、63 和 50μm 的超荧光（分别对应于 $J=0,1,2,3,4,5$），如图 2-3-8 所示。其中波长为 84μm 的超荧光脉冲波形如图 2-3-9(*c*)所示，它的峰值功率密度达到 100MW/cm^2，脉宽为 50~数百纳秒。

图 2-3-9 表示 HF 的超荧光与普通自发发光在实验上的区别。HF 分子的自发发光是同外界激发同时开始的，衰减时间很长，如图 2-3-9(*b*)所示，它的发光强度分布在 4π 立体角空间，而 HF 分子的超荧光，相对于泵浦有延迟，光子简并度高于自发发光的 10^{10}倍，光强分布在由样品几何尺寸决定的衍射角内，所以相干性、方向性都很好，如图 2-3-9(*c*)所示。

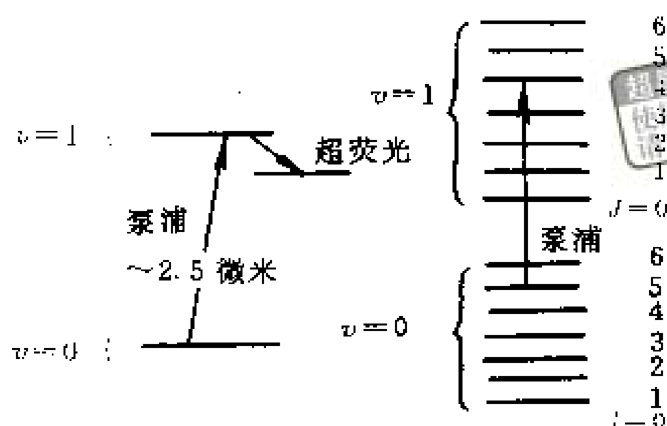
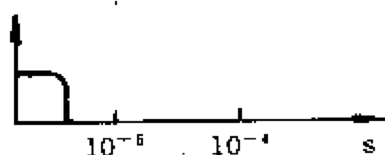
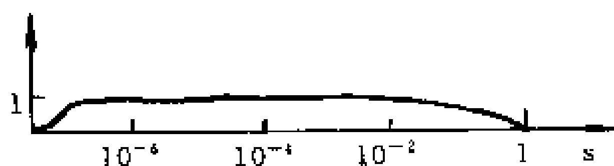


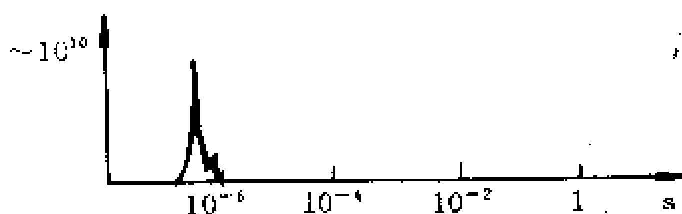
图 2-3-8　HF 分子能级图



(a)　激发脉冲



(b)　非相干输出



(c)　观察到的脉冲

图 2-3-9　HF 的振荡超荧光

四、强的振荡辐射

当小信号增益满足下列关系

$$L_c \ll 1/G \ll L \tag{2-3-15}$$

时，合作辐射被破坏，但系统的增益很高，所以出现光强度正比于发光原子数 N 的强的振荡辐射。

上述的纯超荧光和振荡超荧光都要求 $GL_c \gg 1$ 和 $GL \gg 1$，而强的振荡辐射只要求 $GL \gg 1$，它的 GL_c 往往是小于1的。例如，在长的高增益 χ_e 放电管内，当气压较低，光波长 $\lambda = 3.51\mu m$，$\tau_s = 1.3 \times 10^{-6}s$，$L_c = 5 \times 10^{-2}cm$，设增益 $G \simeq 8cm^{-1}$，$L = 1m$，则 $GL = 8$，而 $GL_c = 4 \times 10^{-3}$，因此出现强的振荡辐射。

§ 2-4　超荧光的单摆方程

现在从理论上分析超荧光，可以使用研究光与二能级原子相互作用的平均场理论或者使用二次量子化的处理方法，它们都导致描写超荧光过程的单摆方程。

一、平均场理论的基本方程

包尼法乔和鲁吉雅多在1975年提出的平均场理论(MFT)[3]，假设光场振幅、介质的宏观电极化强度以及反转粒子数都与空间无关，也就是假设这些量在空间每一点处的值，与对应的平均值相同。

超荧光现象起因于普通荧光，所以首先从全量子力学理论出发进行讨论。N 个二能级原子与 l 个模式的光辐射场组成的系统的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{N} \hbar\omega \hat{j}_{3,n} + \sum_{l} \hbar ck \hat{b}_l^{+} \hat{b}_l + \hat{H}' \tag{2-4-1}$$

式中右端第一项为 N 个二能级原子系统的哈密顿算符，第二项为 l 个模式的光场的哈密顿算符，$\hat{b}_l^{+}$ 和 $\hat{b}_l$ 分别是第 l 个光模式的光子产生算符和湮没算符，$\hat{H}'$ 为 N 个二能级原子与 l 个模式的光场

相互作用哈密顿算符，由第一章的(1-8-15)式，它可表示为

$$\hat{H}' = -\sum_{l}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0 V}}\boldsymbol{u}_e[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{z}_n}\hat{b}_l(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{z}_n}\hat{b}_l^{+}(t)]\cdot\hat{\boldsymbol{\mu}} \tag{2-4-2}$$

上式中 z_n 表示第 n 个原子的坐标。由本章第二节的(2-2-24)式，若选 $\boldsymbol{e}_1=0$，则得到

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_2 = \boldsymbol{e}_2\hat{j}_2 \tag{2-4-3}$$

又由(2-2-22)式得到

$$\boldsymbol{e}_2 = -2\omega_0\boldsymbol{\mu}_{21} \tag{2-4-4}$$

令

$$\boldsymbol{\mu}_{21} = \mu\boldsymbol{u}_d \tag{2-4-5}$$

引入二能级原子的上升和下降算符 $\hat{j}^+$ 和 $\hat{j}^-$：

$$\hat{j}^+ = \hat{j}_1 + \mathrm{i}\hat{j}_2 \tag{2-4-6}$$

$$\hat{j}^- = \hat{j}_1 - \mathrm{i}\hat{j}_2 \tag{2-4-7}$$

则得到

$$\hat{j}_2 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{j}^+ - \hat{j}^-) \tag{2-4-8}$$

第 n 个原子的 $\hat{j}_n^+$、$\hat{j}_n^-$ 和 $\hat{j}_{3,n}$之间的对易关系为

$$[\hat{j}_{n'}^+,\hat{j}_n^-] = 2\hat{j}_{3,n},\delta_{n',n} \qquad [\hat{j}_{3,n'},\hat{j}_n^{\pm}] = \pm\hat{j}_{n'}^{\pm},\delta_{n',n} \tag{2-4-9}$$

将(2-4-4)、(2-4-5)和(2-4-8)式代入(2-4-3)式求出 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_2$ 的表示式后代入(2-4-2)式，得到

$$\hat{H}^1 = -\mathrm{i}\sum_{l}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0 V}}\omega_0\mu\boldsymbol{u}_l\cdot\boldsymbol{u}_d$$

$$\times[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{z}_n}\hat{b}_l(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{z}_n}\hat{b}_l^{+}(t)](\hat{j}_n^+ - \hat{j}_n^-) \tag{2-4-10}$$

设

$$\hat{j}_3(t) = \hat{j}_3(0) \tag{2-4-11}$$

$$\hat{j}^{\pm}(t) = \hat{j}^{\pm}(0)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{2-4-12}$$

$$\hat{b}(t) = \hat{b}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{2-4-13}$$

$$\hat{b}^{+}(t) = \hat{b}^{+}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2-4-14}$$

将它们代入(2-4-10)式，取旋波近似，忽略 $\hat{j}^+\hat{b}^+$ 和 $\hat{j}^-\hat{b}$ 项，得到

$$\hat{H}' = \frac{\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{V}} \sum_{l} \sum_{n=1}^{N} q_l [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{z}_n} \hat{b}_l^+ (t) \hat{j}_n - \hat{b}_l(t) \hat{j}^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{z}_n}]$$

(2-4-15)

式中耦合系数 q_l 为

$$q_l = \omega_0 \mu \sqrt{\frac{1}{2\omega_l \varepsilon_0 \hbar}} \boldsymbol{u}_l \cdot \boldsymbol{u}_d \tag{2-4-16}$$

最后得到在旋波近似下系统的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{N} \hbar\omega \hat{j}_{3,n} + \sum_{l} \hbar ck \hat{b}_l^+ \hat{b}_l + \frac{\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{V}} \times \sum_{l} \sum_{n=1}^{N} q_l [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{z}_n} \hat{b}_l^+ (t) \hat{j}_n^- - \hat{b}_l(t) \hat{j}_n^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{z}_n}] \tag{2-4-17}$$

总哈密顿算符支配着原子与光场组成系统的运动的进展，使用下列形式的变换

$$\tilde{O}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}'_0 t} \hat{O} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}'_0 t} \tag{2-4-18}$$

式中

$$\hat{H}'_0 = \sum_{n=1}^{N} \hbar\omega \hat{j}_{3,n} + \sum_{l} \hbar\omega \hat{b}_l^+ \hat{b}_l \tag{2-4-19}$$

以消除随时间快速变化的量，使 $\tilde{O}(t)$ 的平均值随时间的变化比 $\hat{O}(t)$ 慢，下面使用这样的旋转算符。系统的密度算符 $w(t)$ 满足刘维定理

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\tilde{H}(t), w(t)] \tag{2-4-20}$$

式中

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}^1$$

$$\tilde{H}_0(t) = \sum \hbar(ck - \omega)\hat{b}_l^+ \hat{b}_l$$

$$\tilde{H}'_0(t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{V}} \sum_{l} \sum_{n=1}^{N} q_l \{\hat{b}_l^+ \hat{j}_n^- \exp[\mathrm{i}(\omega - \omega_0)t - \mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{z}_n] - \hat{b}_l \hat{j}_n^+ \exp[-\mathrm{i}(\omega - \omega_0)t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{z}_n]\} \tag{2-4-21}$$

下面的讨论只在旋转坐标系中进行，将去掉算符上的～符号。

现在引入 N 个二能级原子的集体偶极算符代替单个原子的算符。为此，假设 N 个原子排在体积为 $V \doteq L_x L_y L_z$ 的立方格子上，

L_x、L_y、L_z 远大于光的波长。对于原子可以引入倒格子模 η

$$\eta = \frac{2\pi}{L_i} n_i \tag{2-4-22}$$

$$n_i = 0,1,2,\cdots \quad N_i - 1, \quad i = x,y,z$$

和 N 维矢量：$\frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\eta \cdot z_n}, n = 1,2,\cdots,N$。它服从下列正交完整关系

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{i[(\eta - \eta') \cdot z_n]} = \delta_{\eta,\eta'} \tag{2-4-23}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{\eta} e^{i[\eta \cdot (z_{n'} - z_n)]} = \delta_{n',n} \tag{2-4-24}$$

这样，定义 N 个二能级原子的集体偶极算符为

$$\hat{J}^{\pm}(\eta) = \sum_{n=1}^{N} \hat{j}_n^{\pm} e^{\pm i\eta \cdot z_n} \tag{2-4-25}$$

同时定义

$$\hat{J}_3(\eta) = \sum_{n=1}^{N} \hat{j}_{3,n} e^{i\eta \cdot z_n} \tag{2-4-26}$$

它们显然满足下列对易关系

$$[\hat{J}^{+}(\eta), \hat{J}^{-}(\eta')] = 2\hat{J}_3(\eta - \eta') \tag{2-4-27}$$

$$[\hat{J}_3(\eta), \hat{J}^{\pm}(\eta')] = \pm \hat{J}^{\pm}(\eta' \pm \eta) \tag{2-4-28}$$

使用(2-4-24)式，由(2-4-25)式得到

$$\hat{j}_n^{\pm} = \frac{1}{N} \sum_{\eta} \hat{J}^{\pm}(\eta) e^{\mp i\eta \cdot z_n} \tag{2-4-29}$$

将上式代入(2-4-21)式，得到

$$\hat{H}'(t) = \frac{i\hbar}{\sqrt{V}} \sum_{\eta} \sum_{l} q_l [\hat{b}_l^{+} \hat{J}^{-}(\eta) \xi(k_l - \eta, t) - \text{c.c}] \tag{2-4-30}$$

上式中

$$\xi(k_l - \eta, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i[(k_l - \eta) \cdot z_n + (\omega_n - \omega_l)t]}$$
$$\equiv \mathscr{L}(k_l - \eta) q_a(t) \tag{2-4-31}$$

称为衍射函数，它描写原子的每个 η 模与光场的所有模式 k_l 的耦

合情况。

工作物质的辐射过程可以想象为首先原子被极化开始辐射，并在激活体内建立起辐射场，然后这个辐射场由工作物质传播出去。只有激活体内光场模式中的以 η 为中心的立体角内的模式 $\boldsymbol{k}_l$ 与 η 模的耦合，根据(2-4-31)式，有锐的峰特性。因此可将量子化体积 V 分成若干个与激活体相等的体积 v，对于激活体的内场可以这样引入光场的模式算符：

$$\hat{F}(\eta)=\sqrt{\frac{v}{V}}\sum_{l}\hat{b}_l\mathscr{L}(\boldsymbol{k}_l-\eta) \tag{2-4-32}$$

它显然满足光子算符对易关系

$$[\hat{F}(\eta),\hat{F}^{+}_{n'}(\eta')]=\delta_{n,n'}\delta'_{\eta,\eta'} \tag{2-4-33}$$

这样，(2-4-30)式可表示为

$$\hat{H}'=\frac{\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{v}}\sum_{\eta}q_{\eta}(t)\{\hat{F}^{+}(\eta)\hat{J}^{-}(\eta)-\hat{F}(\eta)\hat{J}^{+}(\eta)\} \tag{2-4-34}$$

上式中用 q_η 代替 q_l 是因为 $\boldsymbol{k}_l$ 与 η 模的耦合使得衍射函数有锐的峰的性质，而且 $q_\eta(t)=q_\eta q_a(t)$。以下假设 $q(t)$ 的频谱密度分布是洛伦兹函数型的，即

$$q_\eta(t)=q_0\mathrm{e}^{-t/2T_2^*} \tag{2-4-35}$$

式中 $q_0=q_{\eta0}$，T_2^* 是最小横向弛豫时间。

此外还要考虑光场不断由激活体向外传播时的损耗，为此要在整个系统的密度算符方程中引入损耗项 $\Lambda_s W$，这样密度算符方程应为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H},w]+\Lambda_s w \tag{2-4-36}$$

现在建立轴向平均场方程。任何力学量算符 $\hat{O}$ 的平均值可以这样求出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{O}(t)\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{O}w(t))=T_r(\hat{O}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}) \tag{2-4-37}$$

如果只讨论激活体中的共振模 $k=\eta$，而且是轴向方向上的，即 $n_x=n_y=0$，其 n_z 使 $c|\eta|=\omega$，则由(2-4-21)式的上边表示式可知，(2-4-36)式中的哈密顿算符此时可用(2-4-34)式代入。这样，再将(2-4-36)式代入(2-4-37)式，使用算符对易关系(2-4-27)、(2-4-28)式和(2-4-33)式，可以逐一地求出工作物质极化算符 $\hat{J}^-(\eta)$、粒子数算符 $\hat{J}_3(\eta)$ 和光辐射场算符 $\hat{F}(\eta)$ 的平均值方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{J}^-(\eta)\rangle=\frac{2}{\sqrt{v}}\sum_{\eta}q_\eta(t)\langle\hat{F}(\eta')\hat{J}_3(\eta'-\eta)\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{J}_3(\eta)\rangle=-\frac{1}{\sqrt{v}}\sum_{\eta}q_\eta(t)[\langle\hat{F}^+(\eta)\hat{J}^-(\eta'-\eta)\rangle+\langle\hat{F}(\eta')\hat{J}^+(\eta'+\eta)\rangle] \tag{2-4-38}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{F}(\eta)\rangle=\frac{1}{\sqrt{v}}q_\eta(t)\langle\hat{J}^-(\eta)\rangle-\sigma(\eta)\langle\hat{F}(\eta)\rangle$$

式中 σ 表示光的损耗系数。对于在上述方程中出现的诸如 $\langle\hat{F}(\eta')\hat{J}_3(\eta-\eta')\rangle$ 的项，近似取为

$$\langle\hat{F}(\eta')\hat{J}_3(\eta-\eta')\rangle\simeq\langle\hat{F}(\eta)\rangle\langle\hat{J}_3(\eta-\eta')\rangle$$

等等，从现在起处理通常的 C 一数，而不是算符。对于沿工作物质轴向方向上向左和向右传播的共振轴模，令 $\eta=k_0$。这样，由(2-4-38)式，得到轴向平均场理论单模情形的基本方程为

$$\dot{J}^-(\pm k_0)=2\frac{q(t)}{\sqrt{v}}F(\pm k_0)J_3 \tag{2-4-39}$$

$$\dot{J}_3=-\frac{q(t)}{\sqrt{v}}[F^+(k_0)J^-(k_0)+F^+(-k_0)J^-(-k_0)+\mathrm{C.C}] \tag{2-4-40}$$

$$\dot{F}(\pm k_0)=\frac{q(t)}{\sqrt{v}}J^-(\pm k_0)-\sigma F(\pm k_0) \tag{2-4-41}$$

它们是从光与二能级原子相互作用的全量子理论出发建立起的一般形式的麦克斯韦-布洛赫方程。

使用上述方程组可以建立关于关于超荧光的单摆方程。为此，

首先引入

$$F_A = [F^+(k_0)F(k_0) + F^+(-k_0)F(-k_0)]^{1/2} \quad (2\text{-}4\text{-}42)$$

$$J_A = [J^-(k_0)J^-(k_0) + J^+(-k_0)J^-(-k_0)]^{1/2} \quad (2\text{-}4\text{-}43)$$

使用这样定义的量，由(2-4-39)-(2-4-41)式得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}J_3 + \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_3 + \frac{q_0^2}{v}\mathrm{e}^{-t/T_2^*}(2J_A^2 + 4F_A^2J_3) = 0 \quad (2\text{-}4\text{-}44)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_A^2 + J_3) = -2\sigma F_A^2 \quad (2\text{-}4\text{-}45)$$

式中

$$\beta = \sigma + \frac{1}{2T_2^*} \quad (2\text{-}4\text{-}46)$$

引入布洛赫角 $\theta(t)$，令它满足下列关系

$$J_A(t) = \frac{N}{2}\sin\theta(t) \quad (2\text{-}4\text{-}47)$$

$$J_3(t) = \frac{N}{2}\cos\theta(t) \quad (2\text{-}4\text{-}48)$$

将它们代入(2-4-44)式，得到下列两个方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta(t) + \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t) - \frac{N}{\beta}\mathrm{e}^{-t/T_2^*}\sin\theta(t) = 0 \quad (2\text{-}4\text{-}49)$$

$$F_A(t) = \frac{1}{2}B^{1/2}\mathrm{e}^{t/2T_2^*}\dot{\theta}(t) = 0 \quad (2\text{-}4\text{-}50)$$

式中

$$B^{1/2} = \frac{v^{1/2}}{q_0} \quad (2\text{-}4\text{-}51)$$

由(2-4-50)式看出，欲求出超荧光强度 $\propto F_A^2$，归结为求出 $\theta(t)$，而 $\theta(t)$ 服从(2-4-49)式，它是摩擦系数为 β 的单摆方程。

二、直接使用算符的方法

研究光场与二能级原子体系的相互作用，对于光场可以使用光子的产生和湮没算符表示，这样表示的光场矢势算符如第一章的(1-7-39)式所示。对于原子而言，我们知道，原子的电子波函数，在二次量子化时成为算符，所以，同样可以用算符描写原子的电子运动。若将电子的波函数 $\Psi(x)$ 按本征态 $\Psi_i(x)$ 展开，可以用算符

$\hat{a}^+$ 和 $\hat{a}$ 表示电子的波场，$\hat{a}^+$ 表示电子的产生算符，$\hat{a}$ 表示电子的湮没算符。这样则有

$$\Psi(x) = \sum_i a_i \psi_i(x) \tag{2-4-52}$$

$$\Psi^+(x) = \sum_i a_i^+ \psi_i^*(x) \tag{2-4-53}$$

$\hat{a}^+$ 和 $\hat{a}$ 服从下列反对易关系

$$\hat{a}_i \hat{a}_j^+ + \hat{a}_j^+ \hat{a}_i = \delta_{i,j} \tag{2-4-54}$$

$$\hat{a}_i \hat{a}_j + \hat{a}_j \hat{a}_i = 0 \tag{2-4-55}$$

$$\hat{a}_i^+ \hat{a}_j^+ + \hat{a}_j^+ \hat{a}_i^+ = 0 \tag{2-4-56}$$

电子的哈密顿算符可表示为

$$\hat{H}_e = \sum_n W_i \hat{a}_{i,n}^+ \hat{a}_{i,n} \tag{2-4-57}$$

式中 W_i 是原子的第 i 个能级的能量，对于二能级原子并且谱线是均匀加宽时，则可选

$$W_1 = 0, \quad W_2 = \hbar\omega$$

于是，N 个二能级原子的哈密顿算符为

$$\hat{H}_l = \hbar\omega \sum_{n=1}^{N} \hat{a}_{2,n}^+ \hat{a}_{2,n} \tag{2-4-58}$$

光场与原子的电子相互作用时，系统的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}} - e\hat{\boldsymbol{A}})^2 \tag{2-4-59}$$

式中 m 为电子的质量，$\hat{\boldsymbol{p}}$ 为原子的电子动量算符，其中光场与原子的电子相互作用哈密顿算符为

$$\hat{H}' = \hat{H}'_1 + \hat{H}'_2 \tag{2-4-60}$$

式中

$$\hat{H}'_1 = \int \Psi^+(x)\left(-\frac{e}{m}\right)\hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \Psi(x) \mathrm{d}v \tag{2-4-61}$$

$$\hat{H}'_2 = \frac{e^2}{2m}\int \Psi^+(x)\hat{\boldsymbol{A}}^2 \Psi(x) \mathrm{d}v \tag{2-4-62}$$

这里不考虑 $\hat{H}'_2$，则将(1-7-39)式表示的 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 和二能级原子波函数代入(2-4-61)式，取旋波近似，最后得到

$$\hat{H}' = \hbar \sum_{l} \sum_{n=1}^{N} [(\hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n})\hat{b}_l(t)e^{i\boldsymbol{k}_l\cdot \boldsymbol{z}_n}g_{l,n}^{*}$$
$$+ (\hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n})\hat{b}_l^{+}(t)e^{-i\boldsymbol{k}_l\cdot \boldsymbol{z}_n}g_{l,n}] \qquad (2\text{-}4\text{-}63)$$

式中的耦合系数为

$$g_{l,n} = -\frac{e}{m}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_l\varepsilon_0 V}}\int \psi_{2,n}^{*}\boldsymbol{u}_l \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\psi_{1,n}\mathrm{d}v \qquad (2\text{-}4\text{-}64)$$

对于电偶极近似,$\boldsymbol{u}_l$ 可移出积分号。整个系统的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_L + \hat{H}'$$
$$= \hbar\omega \sum_{n} \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{2,n} + \sum_{l} \hbar\omega_l \hat{b}_l^{+}\hat{b}_l + \hbar \sum_{n,l} [(\hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n})\hat{b}_l e^{i\boldsymbol{k}_l\cdot \boldsymbol{z}_n}g_{l,n}^{*}$$
$$+ (\hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n})\hat{b}_l^{+}e^{-i\boldsymbol{k}_l\cdot \boldsymbol{z}_n}g_{l,n}] \qquad (2\text{-}4\text{-}65)$$

同样,对原子引入倒格子模(2-4-22)式,电子的激发算符$(\hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n})$和消激发算符$(\hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n})$应分别为:$\hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\exp(-i\boldsymbol{\eta}\cdot \boldsymbol{z}_n)$和 $\hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\exp(i\boldsymbol{\eta}\cdot \boldsymbol{z}_n)$。引用光场与原子相互作用的衍射函数(2-4-31)式,则单模光场情形的相互作用哈密顿算符可表示为

$$\hat{H}' = \hbar \sum_{n} [(\hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n})\hat{b}_l \mathscr{L}(\boldsymbol{k}_l - \boldsymbol{\eta})g_{l,n}^{*}$$
$$+ (\hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n})\hat{b}_l^{+}\mathscr{L}(\boldsymbol{k}_l - \boldsymbol{\eta})g_{l,n}] \qquad (2\text{-}4\text{-}66)$$

在相互作用表象,算符方程中的

$$\tilde{H}' = U^{-1}\hat{H}'U \qquad (2\text{-}4\text{-}67)$$

式中
$$U = e^{-i(\hat{H}_e + \hat{H}_L)t/\hbar} \qquad (2\text{-}4\text{-}68)$$

这样
$$\tilde{H}' = \hbar \sum_{n} [(\hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n})\hat{b}_l G_{l,n}^{*}(t) + (\hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n})\hat{b}_l^{+}G_{l,n}(t)]$$
$$(2\text{-}4\text{-}69)$$

式中
$$G_{l,n}(t) = g_{l,n}\mathscr{L}(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\eta})e^{i(\omega - \omega_l)t} \qquad (2\text{-}4\text{-}70)$$

将(2-4-69)式代入求算符平均值的(2-4-37)式,使用算符对易关系(2-4-54)—(2-4-56)式和第一章的(1-7-31)—(1-7-33)式进行运算,容易得到反转粒子数平均值$\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\rangle - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\rangle$和模式 l 的光子数平均值$\langle \hat{b}_l^{+}\hat{b}_l\rangle$的方程,考虑到弛豫过程后,我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\rangle - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\rangle] = -\frac{1}{T_1}[(\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\rangle - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\rangle)$$

$$- N_0] - 2\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}[\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\hat{b}_l\rangle G_{l,n}^{*}(t) - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\hat{b}_l^{+}\rangle G_{l,n}(t)] \tag{2-4-71}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{b}_l^{+}\hat{b}_l\rangle = -\frac{1}{\tau_\phi}\langle \hat{b}_l^{+}\hat{b}_l\rangle + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}[\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\hat{b}_l\rangle G_{l,n}^{*}(t)$$

$$- \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\hat{b}_l^{+}\rangle G_{l,n}(t)] \tag{2-4-72}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\hat{b}_l\rangle G_{l,n}^{*}(t) - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\hat{b}_l^{+}\rangle G_{l,n}(t)] = -\left(\frac{1}{\tau_\phi} + \frac{1}{2T_2^{*}}\right)$$

$$\times [\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\hat{b}_l\rangle G_{l,n}^{*}(t) - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\hat{b}_l\rangle G_{l,n}(t)]$$

$$+ 2\mathrm{i}|G_{l,n}(t)|^2[-(\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\rangle - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\rangle)\langle \hat{b}_l^{+}\hat{b}_l\rangle$$

$$- \langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\rangle] \tag{2-4-73}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\rangle = \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}[\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\hat{b}_l\rangle(\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\rangle$$

$$- \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\rangle)G_{l,n}^{*}(t) - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\hat{b}_l\rangle(\langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\rangle - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\rangle)] \tag{2-4-74}$$

令

$$\Delta N = \langle \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{2,n}\rangle - \langle \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{1,n}\rangle \tag{2-4-75}$$

$$\Phi = \langle \hat{b}_l^{+}\hat{b}_l\rangle \tag{2-4-76}$$

$$\alpha_n^{+} = \hat{a}_{2,n}^{+}\hat{a}_{1,n} \tag{2-4-77}$$

$$\alpha_n = \hat{a}_{1,n}^{+}\hat{a}_{2,n} \tag{2-4-78}$$

则上述四个方程可写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta N) = -\frac{\Delta N - N_0}{T_1} - 2\mathrm{i}\sum_{n}[\langle \hat{\alpha}_n^{+}\hat{b}_l\rangle G_{l,n}^{*}(t) - \langle \hat{\alpha}_n\hat{b}_l^{+}\rangle G_{l,n}(t)] \tag{2-4-79}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = -\frac{\Phi}{\tau_\Phi} + \mathrm{i}\sum_{n}[\langle \hat{\alpha}_n^{+}\hat{b}_l\rangle G_{l,n}^{*}(t) - \langle \hat{\alpha}_n\hat{b}_l^{+}\rangle G_{l,n}(t)] \tag{2-4-80}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\langle \hat{\alpha}_n^{+}\hat{b}_l\rangle G_{l,n}^{*}(t) - \langle \hat{\alpha}_n\hat{b}_l^{+}\rangle G_{l,n}(t)] = -\left(\frac{1}{\tau_\phi} + \frac{1}{2T_2^{*}}\right)$$

$$\times\left[\langle\hat{a}_n^+\hat{b}_l\rangle G_{l,n}^*(t)-\langle\hat{a}_n\hat{b}_l^+\rangle G_{l,n}(t)\right]$$

$$+2\mathrm{i}\,|G_{l,n}(t)|^2\left[-\Phi\Delta N-\langle\hat{a}_n^+\hat{a}_n\rangle\right] \tag{2-4-81}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{a}_n^+\hat{a}_n\rangle=\mathrm{i}\sum_n\left[\langle\hat{a}_n^+\hat{b}_l\rangle G_{l,n}^*(t)-\langle\hat{a}_n\hat{b}_l^+\rangle G_{l,n}(t)\right]\Delta N \tag{2-4-82}$$

再引入符号

$$R=\mathrm{i}\sum_n\left[\langle\hat{a}_n^+\hat{b}_l^-\rangle G_{l,n}^*(t)-\langle\hat{a}_n\hat{b}_l^+\rangle G_{l,n}\right] \tag{2-4-83}$$

$$S=\sum_n\langle\hat{a}_n^+\hat{a}_n\rangle \tag{2-4-84}$$

对上述方程取 $C-$数，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta N)=-\frac{\Delta N-N_0}{T_1}-2R \tag{2-4-85}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi=-\frac{\phi}{\tau_\phi}+R \tag{2-4-86}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R=-\left(\frac{1}{\tau_\phi}+\frac{1}{2T_2^*}\right)R+|G_{l,n}(t)|^2(\Phi\Delta N+S) \tag{2-4-87}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S=R\Delta N \tag{2-4-88}$$

当忽略(2-4-85)式右端第一项，将(2-4-85)式代入(2-4-87)式，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\Delta N)+\left(\frac{1}{\tau_\phi}+\frac{1}{2T_2^*}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta N)+2|G_{l,n}(t)|^2(\Phi\Delta N+S)=0 \tag{2-4-89}$$

如果这样引入布洛赫角 $\theta(t)$：

$$S=\frac{1}{2}[N\sin\theta(t)]^2 \tag{2-4-90}$$

$$\Delta N=N\cos\theta(t) \tag{2-4-91}$$

将它们代入(2-4-89)式，并同样取 $|G_{l,n}(t)|^2=q_0^2\mathrm{e}^{-t/T_2^*}$，则导致单摆方程(2-4-49)式和光子数 Φ 与 $\theta^2(t)$ 成正比的表示式，即得到与平均场理论一致的结果。

三、使用单摆方程讨论纯超荧光

现在继续讨论单摆方程(2-4-49)式。一般而言，光损耗速率 $\sigma \sim 10^8 s^{-1} \gg 1/2T_2^*$，这样，在(2-4-49)式中的 β，由(2-4-46)式，$\beta \approx \sigma$。此外，引入合作时间

$$t_c = \frac{1}{q_0 \sqrt{\rho}} \tag{2-4-92}$$

则(2-4-49)式中第三项系数 $N/B = 1/t_c^2$，于是单摆方程(2-4-49)式变为

$$\ddot{\theta}(t) + \sigma\dot{\theta}(t) - \frac{1}{t_c^2} e^{-t/T_2^*} \sin\theta(t) = 0 \tag{2-4-93}$$

现在研究问题的初始条件，按经典观点，初始时粒子数反转，内场为零，这相当于

$$\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$$

这是单摆的一个不稳定平衡点，意味着系统不发生辐射。这样，相应的单摆方程将有平凡解：

$$\theta(t) = 0$$

问题出在经典的处理没有考虑到最初启动单摆的量子噪声，为此给出初始的完全激发态以量子化噪声极化

$$J(t) = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \tag{2-4-94}$$

相应的初始条件应为

$$\theta(0) = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \tag{2-4-95}$$

对于纯超荧光，$t_c \gg t_s$，所以 $\sigma t_c \gg 1$，即光子从样品逃逸的时间比合作时间短，不会引起受激辐射，样品内进行的是合作辐射，相应地，单摆处于过阻尼状态，单摆方程中的惯性项 $\ddot{\theta}(t)$ 可忽略，于是(2-4-93)式变为

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_R} e^{-t/T_2^*} \sin\theta(t) \tag{2-4-96}$$

式中
$$\tau_R = \sigma t_c^2 = \sigma / q_0^2 \rho \tag{2-4-97}$$
(2-4-96)式也可以表示为
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\theta = \frac{\sin\theta}{\tau_R} \tag{2-4-98}$$

式中
$$\tau = T_2^*(1 - \mathrm{e}^{-t/T_2^*}) \tag{2-4-99}$$
使用初始条件(2-4-95)式，得到(2-4-98)方程的解为
$$\sin\theta(\tau) = \mathrm{sech}\left(\frac{\tau - \tau_D}{\tau_R}\right) \tag{2-4-100}$$
上式中延迟时间 τ_D 为
$$\tau_D = \frac{1}{2}\tau_R \ln N \tag{2-4-101}$$
现在求纯超荧光强度，根据前边得到的能量平衡方程(2-4-45)式，光强的变化等于光强的损耗，将(2-4-48)式代入得到光强为
$$I(t) = 2\sigma F_A^2 = \frac{1}{2}\sigma B \mathrm{e}^{t/T_2^*} \dot{\theta}^2(t) \tag{2-4-102}$$
将(2-4-98)和(2-4-100)式代入上式并考虑到(2-4-97)和(2-4-92)式，最后得到
$$I(\tau) = N^2 \frac{q_0^2}{2\sigma v} \mathrm{e}^{-t/T_2^*} \mathrm{sech}^2\left(\frac{\tau - \tau_D}{\tau_R}\right) \tag{2-4-103}$$
我们得到了与发光原子数平方 N^2 成正比的纯超荧光光强，它的发光延迟时间由(2-4-101)式可知与 $\ln N/N$ 成正比。根据上式，对于一定的 L 和 ρ，可得到纯荧光单脉冲的波形，理论计算与实验结果的比较，如本章第三节的图 2-3-6 所示。

四、使用单摆方程讨论振荡超荧光

对于振荡超荧光，因为 $\sigma t_c \simeq 1$，所以 $t_c \simeq \tau_R$，表明此时原子发射的光子能够再作用到原子系统上去，从样品输出的光脉冲不但决定于合作自发辐射，也有受激辐射的贡献，与此相对应，这时单摆的振动不再是过阻尼的，系统的运动服从(2-4-93)式。为数值求解

方便，引入规格化时间 t'

$$t' = \frac{t}{\tau_R} \tag{2-4-104}$$

和下列符号

$$\alpha = \frac{t}{T_2^*} \tag{2-4-105}$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{\tau_R} \tag{2-4-106}$$

则(2-4-93)式为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t'^2} + \gamma\left(\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t'} - \mathrm{e}^{-\alpha t'}\sin\theta\right) = 0 \tag{2-4-107}$$

初始条件为(2-4-95)式。可以看出，对于一定波长的超荧光，上述方程主要受 ρ、L、T_2^* 三个实验变量的支配，可以固定其中一个参数，讨论其它两个物理量的变化对超荧光过程的影响。模拟表明，例如对 Cs 原子射束情形，在一定参数下可以观测到从纯超荧光向振荡超荧光的过渡。对于 HF 分子气体，当取 $\gamma=0.1$，$\alpha=10^{-3}$，$\theta(0)=10^{-5}$时，根据(2-4-107)和(2-4-102)式数值模拟出的振荡超荧光波形与实验结果基本符合。

上面我们从理论上讨论了超荧光，上述的单模理论不能很好地解释 Cs 原子射束的纯超荧光实验中出现的横效应，为此人们发展了多模的平均场理论。

§2-5 双色超荧光

1975 年 R. Florian 等人报导了在 KCl 晶体中的 O_2^- 分子离子心产生双色超荧光的实验[6]，波长是 $\lambda_1=629.1\text{nm}$，$\lambda_2=592.8\text{nm}$。

在 KCl 中的 O_2^- 心的普通荧光光谱如图 2-5-1 所示，这是在 4.2K 时的情形，因在低温，所以无声子参与，看出振子力最强的是 0-9 跃迁，波长为 $\lambda=559.8\text{nm}$。

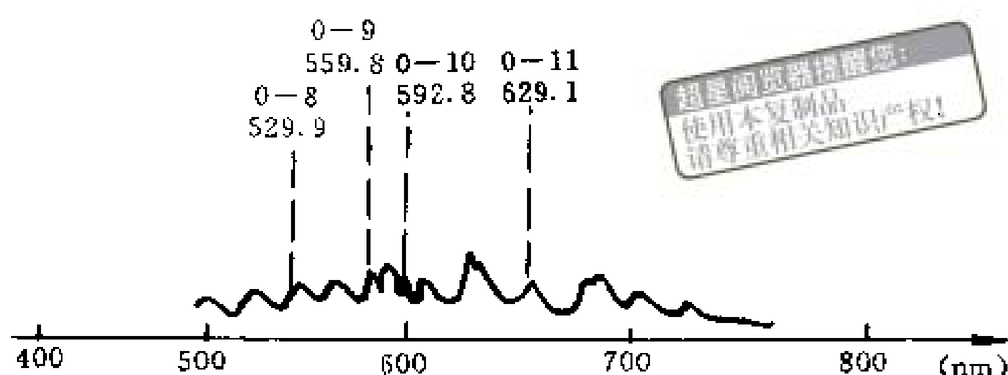


图 2-5-1 KCL 中 O_2^- 心的荧光光谱

实验用的 $KCl:O_2^-$ 晶体为 $5\times5\times10mm^3$，泵浦源是锁模 Nd：YAG 激光的四次谐波，波长 $\lambda_2=266nm$，脉宽为 30ps，单脉冲的最大能量为 100μJ，入射到样品上的峰值强度为 $40GW/cm^2$。

当激发光脉冲能量≤20μJ 时，实验观察到 O_2^- 的各向同性的自发辐射，当样品处于 4.2K 时，自发辐射衰减时间为 50±3ns。

当激发光脉冲能量≥30μJ(>$10GW/cm^2$)，$\lambda=629.1nm$ 的谱线变为各向异性，在样品内部，它与笔形的激活体积共线，在样品外，由于样品表面的折射，荧光与激发的光脉冲在方向上有一定偏差，同时荧光强度增加 10^{14} 倍，脉宽为 0.5—6ns，荧光脉冲的延迟时间为 0.5—10ns 之间，这些正是超荧光的基本特征，用迈克尔逊干涉仪测得的相干时间为 100ps，实验装置如图 2-5-2 所示，实验结果见图 2-5-3。

当激发用的光脉冲能量≥70μJ 时，从样品输出的光脉冲颜色发生变化，这是因为 $\lambda_1=629.1nm$ 和 $\lambda_2=592.8nm$ 两种波长的光同步爆发所致。判断这两种波长的光同时产生的实验装置如图 2-5-4 所示。从样品出来的双色超荧光脉冲，经反射光栅分开后，通过不同的光程达到光电探测器，实验结果表明，两个光脉冲的时间差正确地反映了它们在光程长度上的差别，如图 2-5-5 所示。

可见，双色超荧光脉冲的爆发有很好的同步性，双色超荧光颜色的改变与泵浦能量有关，超荧光脉冲强度的最大值与延迟时间

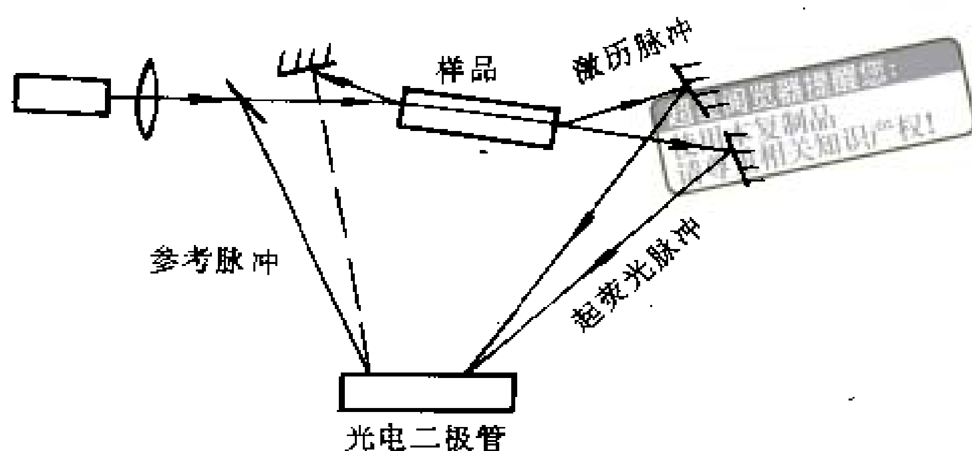


图 2-5-2　观测 λ=629.1nm 超荧光实验装置

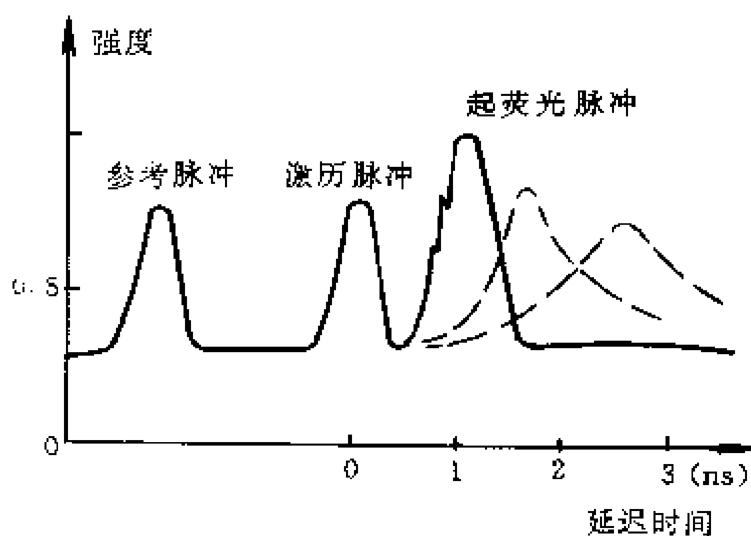


图 2-5-3　λ=629.1nm 超荧光

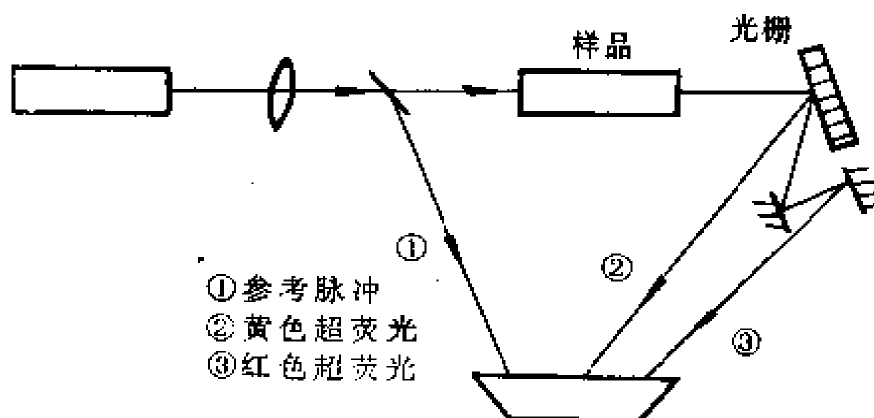


图 2-5-4　观察双色超荧光实验装置

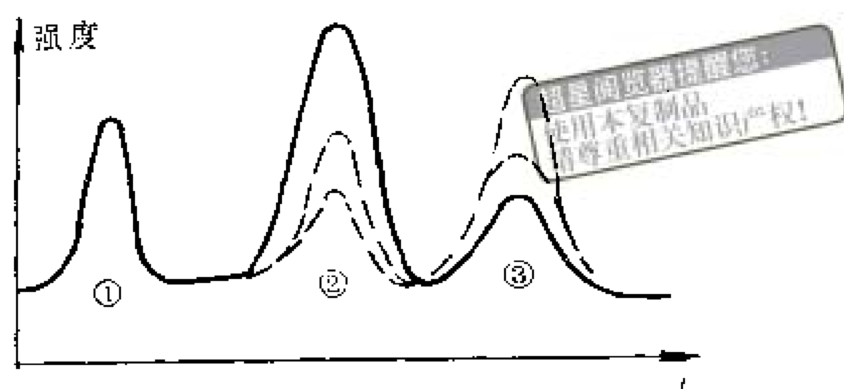


图 2-5-5　双色超荧光

有明显的相关性。

现在讨论产生双色超荧光的物理机制。在 KCl 晶体中,O_2^- 心

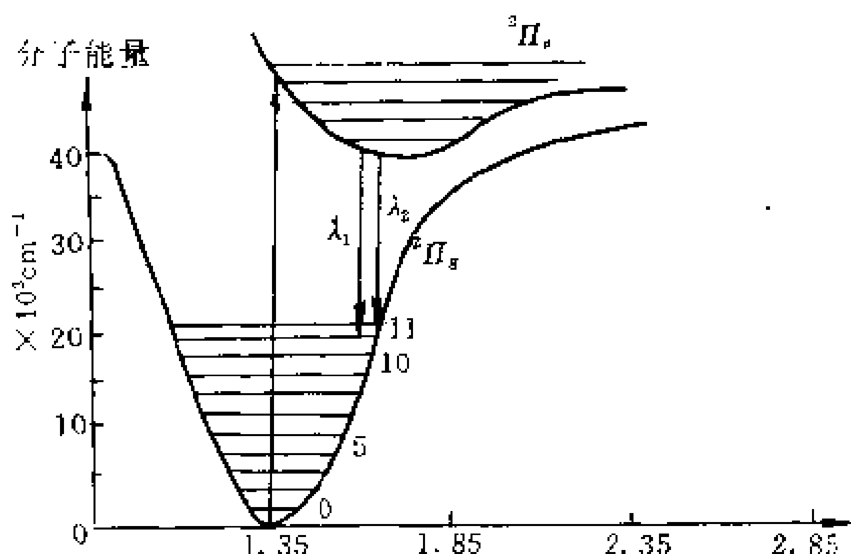


图 2-5-6　KCl:O_2 位形坐标图

的位形坐标图如图 2-5-6 所示,观察到的双色超荧光发生在 $0(^2\Pi_u)\rightarrow 10(^2\Pi_g)$ 能级之间的跃迁($\lambda_1=592.8$nm)和 $0(^2\Pi_u)\rightarrow 11(^2\Pi_g)$ 能级之间的跃迁($\lambda_2=629.1$nm)。O_2^- 是双原子分子,$^2\Pi_u$、$^2\Pi_g$ 等符号是双原子分子的光谱项符号。

画出有关过程的能级图,如图 2-5-7 所示,相当于激发的光脉冲将 O_2^- 从基态抽运到高能级 4,通过低温热库作用使粒子非相干地弛豫到能级 3;从能级 3 跃迁到能级 2 和 1,给出双色超荧光,最

后衰减回到基态。有了这样的图象，可以进行过程的动力学分析。

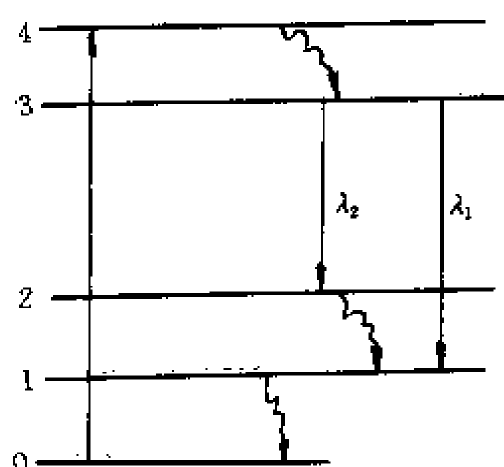


图 2-5-7

此外，人们在实验上还曾观察到喇曼散射超荧光等。

参 考 文 献

[1] Dicke R.H. Phys. Rev, Vol 93, 1954, 99

[2] Файн Н В. УФН, Т64, вып2, 1958. 273

[3] Baonifacio R and Lugiato L A. Phys. Rev, A, Vol. 11, 1975, 1507

[4] Gibbs M M. in "Cooperative Effects in Matter and Radiation", ed by C.N. Bowden et al, Plenum Press N.Y. 1977, 61
Vrehen H. F. ibid, 79

[5] Skribanowitz N et al. Phys. Rev. Letters, Vol30, 1973, 309

[6] Florian R et al. Phys. Rev, A. Vol29, 1984, 2709

[7] 沈柯. 中国激光, Vol 9, No8, 1982, 545

第三章　共振荧光

本章讨论二能级原子与外界光场共振作用时产生的荧光现象。首先介绍关于共振荧光的实验结果，然后建立描写共振荧光的基本方程并用以讨论共振荧光的动力学斯塔克效应，最后研究共振荧光的光子反聚束。

§3-1　共振荧光

在频率与原子能级间跃迁产生的光的频率相近的外界光场作用下，原子发出的荧光，一般称为共振荧光。当外界光场共振地或准共振地同二能级原子相互作用时，如果入射的光场很弱，根据经典电动力学来看，原子产生荧光的过程，就是散射光的过程，频率不变，即光子被原子的散射完全是弹性的。激光出现以后，人们可以使用强的入射光场进行共振荧光实验。当增大入射光场的强度时，开始出现非弹性成分，特别是当入射光场的拉比频率 $\Omega_R=\mu E/\hbar$ 超过谱线的自然宽度时，若入射光的频率与原子的跃迁频率相重合，人们发现共振荧光的光谱存在三个峰，即在中心峰的两侧分布着对称的次峰。当入射光场强度大到使共振荧光足以出现三个峰的光谱分布，称为动力学斯塔克效应。通常认为较比简单的共振荧光现象，近年来实际上已经发现了许多新的效应，诸如能级交叉效应、光子反聚束效应等等。因此，关于共振荧光问题，在量子光学中形成了一个新的研究领域。

可见，共振荧光不是原子的合作效应，它是被外来光驱动的量子力学开系统的最简单例子。

一、低入射光强时共振荧光实验

首先来看 1976 年完成的低入射光强情形的共振荧光实验[1]。实验用的是^{138}Ba 原子射束，经圆孔准直，准直比为 1：500，这样，相应的压缩的都普勒展宽为 2MHz。原子射束和激发用的激光都在共焦型的法卜利-白洛标准具内，原子射束方向、激发用的激光传播方向和观察方向互相垂直，如图 3-1-1 所示。

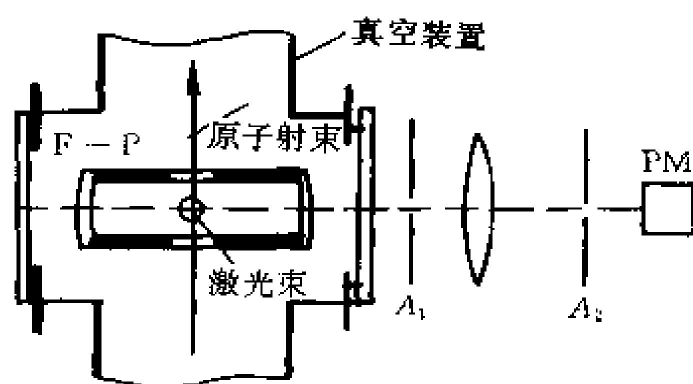


图 3-1-1　共振荧光实验

在这个实验中，光谱线的总频宽取决于原子射束的准直比、观测的张角（图 3-1-1 中的 A_1 和 A_2 孔对应于 2.5mrad 的张角，这个张角对应于大约 3MHz 的压缩都普勒展宽）、激光本身的频宽和法卜利-白洛标准具的精细度。对应于图 3-1-1 的实验布局，谱线的总频宽约 10MHz。

实验观测的是^{138}Ba 的

$$6s^2 \quad {}^1S_0 \quad —6s6p \quad {}^1P_1 \qquad \lambda = 553.5\text{nm}$$

跃迁产生的共振荧光，它的自然宽度为 20MHz，而上述的被测的光谱线的总频宽为 10MHz，因此，这种鉴别率足以显示出荧光的频率分布。实验用 5mW 的激光共振激发，观察到的荧光光谱比自然宽度要窄，实际上看到的荧光光谱半宽度为 12MHz，如图 3-1-2 所示。

在 Mg 中也进行过类似的实验。

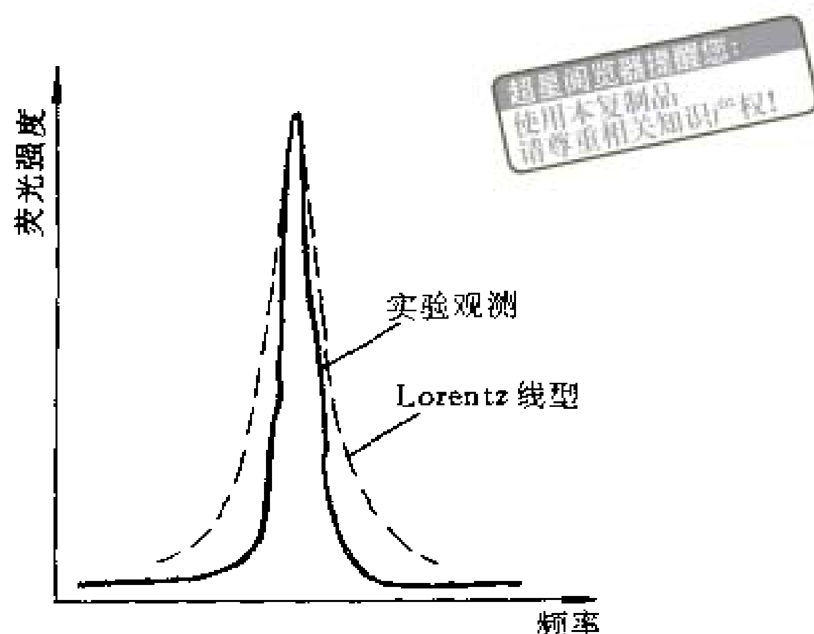


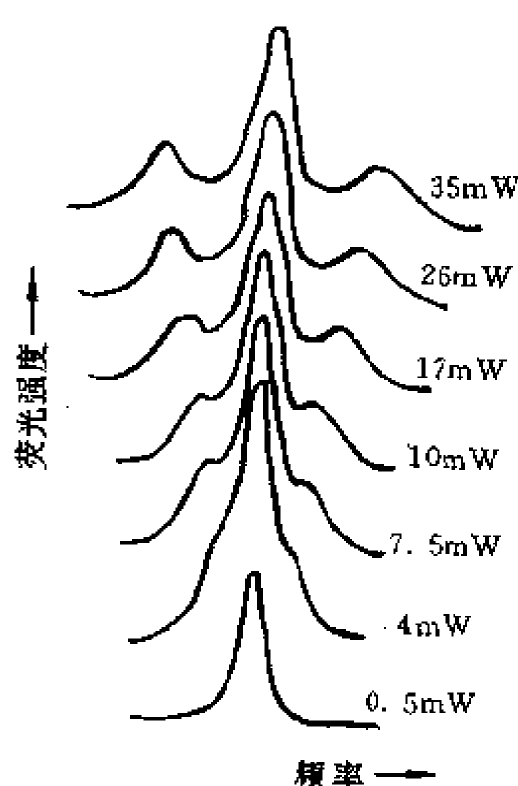
图 3-1-2 共振荧光

二、高激光强度入射下的共振荧光实验

1972 年柯格尼克(H. Kogelnik)等人进行了高激光强度入射下的钠原子共振荧光实验。他们用两个单模 CW 染料激光器，两个激光器的激光频宽都小于 1MHz，其中的一个激光器的激光稳定到钠原子的 $^2P_{3/2}(F=3) \rightarrow {}^2S_{1/2}(F=2)$ 跃迁上，用来分裂原子射束；另一个激光器是自由运行的，其单模输出功率 60mW。第二个激光束与第一个激光束外差，以决定第二个激光器的激光频率相对于钠原子跃迁频率的大小，其拍频信号用无线电频率的频谱仪分析。

当将激光频率调谐到钠原子的共振谱线的中心处时，实验结果表明，随着激光功率的增加，光谱旁带的最大位值变化，旁带信号强度大约是中心峰值的 1/3，这与莫罗(B. R. Mollow)的理论预言一致，图 3-1-3 是在不同的激光功率时的共振荧光光谱。

当激光相对于原子跃迁的准确频率失调时，旁带的极大值发生变化，实验结果表明，失调越大，旁带极大值变小并且远离光谱



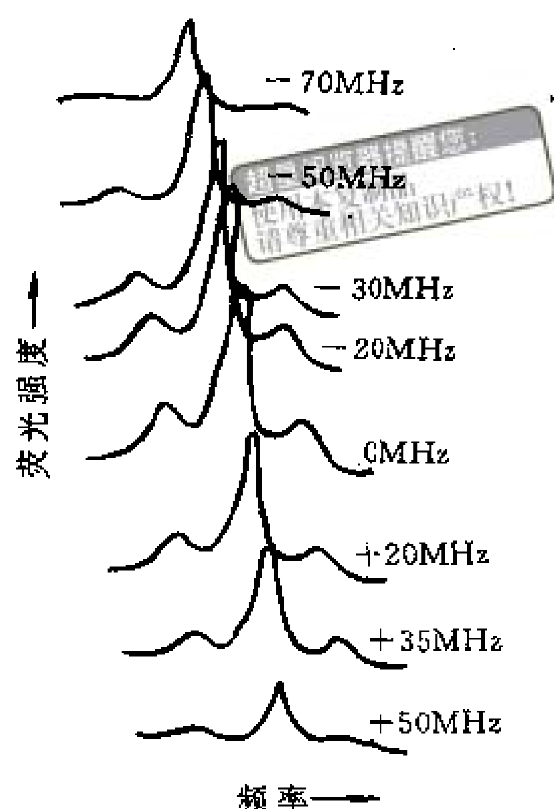


图 3-1-3　共振荧光的斯塔克效应　　图 3-1-4　共振荧光的斯塔克效应

中心，旁带和中心成分之间的频率距离是失调的函数。图 3-1-4 是激光功率为 30mW 时的实验结果。

下面使用共振荧光的基本方程组，对共振荧光谱线的动力学斯塔克效应进行讨论。

§3-2　共振荧光的基本方程和对动力学斯塔克效应的讨论

首先从二能级原子的密度矩阵方程出发，建立共振荧光的基本方程组。设二能级原子的下能级为基态，则 $\gamma_\beta=0$，又因为外界激励为共振激发，则 $\omega=\omega_{\alpha\beta}$。由第一章第四节得到此时的密度矩阵组为

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\alpha\alpha}}{\mathrm{d}t} = -\gamma_{\alpha}\rho_{\alpha\alpha} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\rho_{\beta\alpha}F_{\alpha\beta} - \rho_{\alpha\beta}F_{\beta\alpha}] \tag{3-2-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\beta\beta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\rho_{\alpha\alpha}}{\mathrm{d}t} \tag{3-2-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\gamma_{\alpha}}{2} + \mathrm{i}\omega\right)\rho_{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{\beta\beta})F_{\alpha\beta} \tag{3-2-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\beta\alpha}}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\gamma_{\alpha}}{2} - \mathrm{i}\omega\right)\rho_{\beta\alpha} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{\beta\beta})F_{\beta\alpha} \tag{3-2-4}$$

设光场 $E(t)$ 为

$$\boldsymbol{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathscr{E}(t) + \mathscr{E}^{*}(t)]\boldsymbol{E}_{0} \tag{3-2-5}$$

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\Omega}t} \tag{3-2-6}$$

$$R_{\Omega} = 2\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{l}}{\hbar\sqrt{2}}\mathscr{E}(0) \tag{3-2-7}$$

将它们代入(3-2-1)—(3-2-4)式，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{\alpha\alpha}(t) = -\gamma_{\alpha}\rho_{\alpha\alpha}(t) + \frac{\mathrm{i}R_{\Omega}}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\Omega}t}\rho_{\beta\alpha}(t)] - \frac{\mathrm{i}R_{\Omega}}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\Omega}t}\rho_{\alpha\beta}(t)] \tag{3-2-8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{\beta\beta}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{\alpha\alpha}(t) \tag{3-2-9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho_{\alpha\beta}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\Omega}t}] = -S[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\Omega}t}\rho_{\alpha\beta}(t)] - \frac{\mathrm{i}R_{\Omega}}{2}[\rho_{\alpha\alpha}(t) - \rho_{\beta\beta}(t)] \tag{3-2-10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho_{\beta\alpha}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\Omega}t}] = -S^{*}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\Omega}t}\rho_{\beta\alpha}(t)] + \frac{\mathrm{i}R_{\Omega}}{2}[\rho_{\alpha\alpha}(t) - \rho_{\beta\beta}(t)] \tag{3-2-11}$$

式中

$$S = \frac{\gamma_{\alpha}}{2} + \mathrm{i}(\omega - \omega_{\Omega}) \tag{3-2-12}$$

S^{*} 为 S 的共轭复数。

先求上述方程组的稳态解。为此令(3-2-8)—(3-2-11)式为

零，则得到稳态解为

$$\rho_{\alpha\alpha}^{(S)}=\frac{\dfrac{R_\Omega^2}{4}}{\dfrac{R_\Omega^2}{2}+\dfrac{\gamma_\alpha^2}{4}+(\Delta\omega)^2} \tag{3-2-13}$$

$$\rho_{\beta\beta}^{(S)}=\frac{\mathrm{i}\,\dfrac{R_\Omega S}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\dfrac{R_\Omega^2}{2}+\dfrac{\gamma_\alpha^2}{4}+(\Delta\omega)^2} \tag{3-2-14}$$

式中 $\Delta\omega=\omega-\omega_\Omega$。

为了研究共振荧光的动力学斯塔克效应，应该求(3-2-8)—(3-2-11)式的暂态解。为此，使用拉普拉斯变换。根据拉普拉斯变换的定义，函数 $f(t)$的象函数为

$$F(p)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \tag{3-2-15}$$

作反变换，得到象原函数

$$f(t)=L^{-1}\{F(p)\} \tag{3-2-16}$$

式中 $p=c+\mathrm{i}\omega$ 是从付利叶变换推广来的。

现在对(3-2-8)—(3-2-11)式中的函数作拉普拉斯变换

$$\tilde{\rho}_{\alpha\alpha}(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\rho_{\alpha\alpha}(t)\mathrm{d}t \tag{3-2-17}$$

$$\tilde{\rho}_{\beta\beta}(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\rho_{\beta\beta}(t)\mathrm{d}t \tag{3-2-18}$$

$$\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\rho_{\alpha\beta}(t)\mathrm{d}t \tag{3-2-19}$$

$$\tilde{\rho}_{\beta\alpha}(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\rho_{\beta\alpha}(t)\mathrm{d}t \tag{3-2-20}$$

将它们代入(3-2-8)—(3-2-11)式，并考虑到拉普拉斯变换的微分性质

$$L\{f'(t)\}=pF(p)-f(0) \tag{3-2-21}$$

得到上述四个方程的象函数方程为

$$(p+\gamma_a)\tilde{\rho}_{\alpha\alpha}(p)+\frac{\mathrm{i}R_\Omega}{2}\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(p)-\frac{\mathrm{i}R_\Omega}{2}\tilde{\rho}_{\beta\alpha}(p)=\tilde{\rho}_{\alpha\alpha}(0) \tag{3-2-22}$$

$$p\tilde{\rho}_{\alpha\alpha}(p)+p\tilde{\rho}_{\beta\beta}(p)=\tilde{\rho}_{\alpha\alpha}(0)+\tilde{\rho}_{\beta\beta}(0) \tag{3-2-23}$$

$$\frac{\mathrm{i}R_\Omega}{2}\tilde{\rho}_{\alpha\alpha}(p)+(p+S)\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(p)-\frac{\mathrm{i}R_\Omega}{2}\tilde{\rho}_{\beta\beta}(p)=\rho_{\alpha\beta}(0) \tag{3-2-24}$$

$$-\frac{\mathrm{i}R_\Omega}{2}\tilde{\rho}_{\alpha\alpha}(p)+(p+S^*)\tilde{\rho}_{\beta\alpha}(p)+\frac{\mathrm{i}R_\Omega}{2}\tilde{\rho}_{\beta\beta}(p)=\tilde{\rho}_{\beta\alpha}(0) \tag{3-2-25}$$

由这四个方程求出 $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(p)$的表示式为

$$\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(p)=\frac{(p+\gamma_a)(p+S^*)+R_\Omega^2/2}{A(p)}\rho_{\beta\alpha}(0)+\frac{R_\Omega^2}{2A(p)}\rho_{\beta\alpha}(0)+\frac{\mathrm{i}R_\Omega(p+\gamma_a)(p+S^*)}{2A(p)p}[\rho_{\alpha\alpha}(0)+\rho_{\beta\beta}(0)] \tag{3-2-26}$$

式中 $A(p)$为

$$A(p)=(p+\gamma_a)(p+S)(p+S^*)+R_\Omega^2(p+\frac{\gamma_a}{2}) \tag{3-2-27}$$

引用新的系数符号 $\xi_{\rho\alpha}(p)$、$\xi_{\rho\rho}(p)$、$\xi_{\rho\rho}^*(p)$和 $\xi_{\rho\beta}(p)$，可将(3-2-26)式改写为

$$\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(p)=\xi_{\rho\alpha}(p)\rho_{\alpha\alpha}(0)+\xi_{\rho\rho}(p)\rho_{\alpha\beta}(0)+\xi_{\rho\rho}^*(p)\tilde{\rho}_{\beta\alpha}(0)+\xi_{\rho\beta}(p)\rho_{\beta\beta}(0) \tag{3-2-28}$$

求出上式的反变换为

$$\rho_{\alpha\beta}(t+\tau)=\xi_{\rho\alpha}(\tau,t)\rho_{\alpha\alpha}(t)+\xi_{\rho\rho}(\tau,t)\rho_{\alpha\beta}(t)+\xi_{\rho\rho}^*(\tau,t)+\xi_{\rho\beta}(\tau,t)\rho_{\beta\beta}(t) \tag{3-2-29}$$

上式中 $\xi_{\rho\alpha}(\tau,t)$、$\xi_{\rho\rho}(\tau,t)$、$\xi_{\rho\rho}^*(\tau,t)$和 $\xi_{\rho\beta}(\tau,t)$是 $\xi_{\rho\alpha}(p)$、$\xi_{\rho\rho}(p)$、$\xi_{\rho\rho}^*(p)$和 $\xi_{\rho\beta}(p)$的反变换。

按照上述方法，同样可以求出 $\rho_{\beta\alpha}$、$\rho_{\alpha\alpha}$和 $\rho_{\beta\beta}$随时间变化的关系式。

现在求共振荧光的光谱线线型函数和分布，这首先要求出自相关函数 $g(\tau,t)$，根据量子回归定理，自相关函数可通过密度矩阵

表示[3][4]

$$g(\tau,t)=\xi_{\rho\rho}(\tau,t)\rho_{\alpha\alpha}(t)+\xi_{\rho\beta}(\tau,t)\rho_{\beta\alpha}(t) \qquad (3\text{-}2\text{-}30)$$

对于稳态情形，可表示为

$$g(\tau)=\xi_{\rho\rho}(\tau)\rho_{\alpha\alpha}^{(S)}+\xi_{\rho\beta}(\tau)\rho_{\beta\alpha}^{(S)} \qquad (3\text{-}2\text{-}31)$$

谱线的线型函数 $g(\nu)$ 为

$$g(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau e^{i\nu\tau}g(\tau)=2\pi\,|\rho_{\alpha\beta}^{(S)}|^2\delta(\nu-\omega)+\rho_{\alpha\alpha}^{(S)}R_{\Omega}^2 r_{\alpha}$$

$$\cdot\frac{(\nu-\omega)^2+(\frac{R_{\Omega}^2}{2}+r_{\alpha}^2)}{[(\nu-\omega)^2+a^2][(\nu-\omega-R_{\Omega})^2+d^2][(\nu-\omega+R_{\Omega})^2+d^2]} \qquad (3\text{-}2\text{-}32)$$

$A(p)=0$ 的三个根为 $p_0, p_{1,2}=d+iR_{\Omega}$，当共振激发时，$a=-r_{\alpha}/2$，$d=3r_{\alpha}/4$，$R_{\Omega}=(R_{\Omega}^2-r_{\alpha}^2/10)^{1/2}$。由上述结果看出，当用强光场激发时，$R_{\Omega}\gg r_{\alpha}$，在频谱图上出现三个峰，如图 3-2-1 所示。

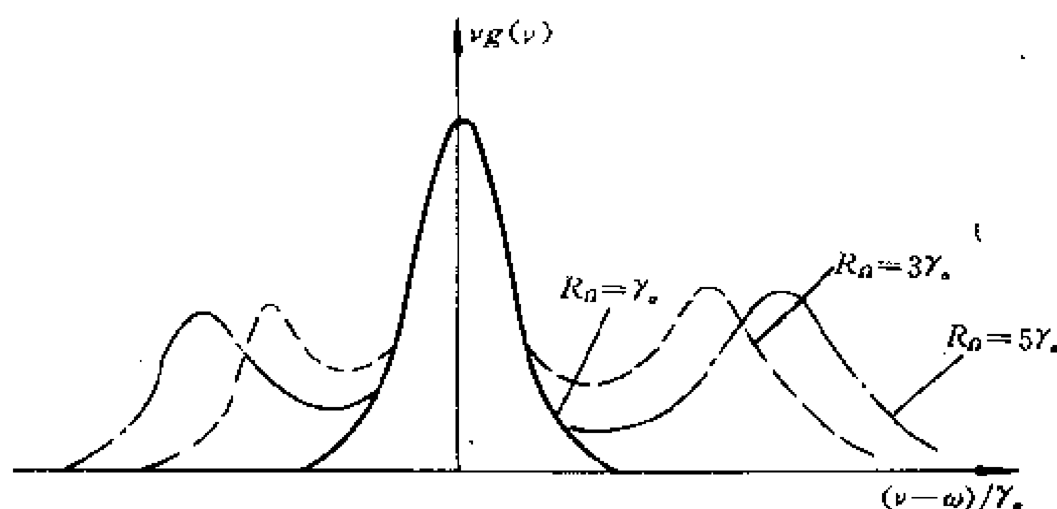


图 3-2-1

图 3-2-2 是钠原子的 $^2P_{3/2}(F=3)\rightarrow{}^2S_{1/2}(F=2)$ 共振荧光的理论计算曲线和实验测量结果[5]。

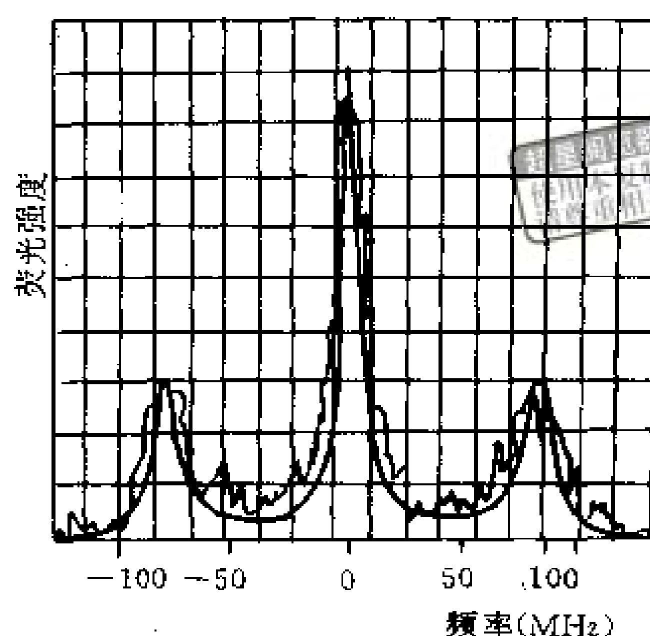


图 3-2-2

§ 3-3 共振荧光的光子反聚束效应

实验表明共振荧光的光子具有反聚束效应。在第二章第一节曾讨论热光源的光子具有聚束效应，并为光的强度相关起伏实验所证实。通常采用二阶相关函数描写光子的相关，由物理光学知道，对于如图 3-3-1 所示的面光源发出的光，相关函数定义为

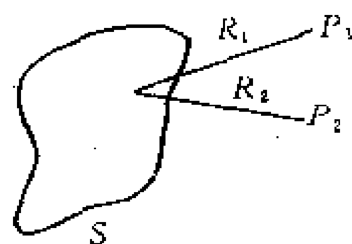


图 3-3-1 面光源

$$\Gamma_{12}(P_1,P_2,\tau)=\langle V_1(P_1,t+\tau)V_2^*(P_2,t)\rangle$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T V_1(P_1,t+\tau)V_2^*(P_2,t)\mathrm{d}t \tag{3-3-1}$$

上式中 $V_1(P_1,t+\tau)$ 和 $V_2(P_2,t)$ 分别为光源发出的光在空间 P_1 和 P_2 处的光场。

规格化的 Γ_{12} 称为复相干度

$$\gamma_{1,2}(P_1,P_2,\tau)=\frac{\Gamma_{12}(P_1,P_2,\tau)}{\sqrt{I_1}\,\sqrt{I_2}} \tag{3-3-2}$$

上式中 I_1 和 I_2 分别为 P_1 和 P_2 处的光强。光的二阶相关函数描写强度相关，定义为

$$\langle I_1(t+\tau)I_2(t)\rangle=\langle V_1(t+\tau)V_1^*(t+\tau)V_2(t)V_2^*(t)\rangle \tag{3-3-3}$$

规格化的二阶相关函数为

$$g^{(2)}_{(\tau)}\big|_{\tau\to 0}=\frac{\langle I_1(t+\tau)I_2(t)\rangle}{\langle I(t)\rangle^2} \tag{3-3-4}$$

用光子数表示则为

$$g^{(2)}_{(\tau)}=\frac{\langle n_1n_2\rangle}{\bar{n}^2} \tag{3-3-5}$$

$$\bar{n}=\langle n_1\rangle=\langle n_2\rangle$$

在第二章第一节讨论的强度相关起伏实验中，光源 S 发出的光分束后，到达相关器，如用横坐标表示光束 1 相对于光束 2 的延迟时间 τ，纵坐标表示光电探测器 1 和 2 上的相关计数，对于黑体辐射作为光源情形，实验结果如图 3-3-2 上的曲线 a 所示。表明当光束 1 和 2 到达的相对延迟时间 τ 不大时，光子趋向于同时到达，即 $g^{(2)}_{(\tau)}\to 2$；当 τ 增大时，由曲线看出，$g^{(2)}_{(\tau)}$ 下降到 1，即趋向不相关，这就是光束聚束效应。

对于上述实验如用激光作光源，则实验测得 $g^{(2)}_{(\tau)}\to 1$，如图 3-3-2 上的曲线 b 所示，称此为不聚束。

对于共振荧光，进行上述的强度相关实验时，发现有新的特点。图 3-3-3 是 Na 原子的共振荧光实验结果。表明当 τ 很小时，共振荧光的 $g^{(2)}_{(\tau)}\to 0$，说明光子不趋向同时到达，与图 3-3-2 的曲线 a 情形正相反，称此为反聚束。其它如双光子吸收，光的二次谐波等也都存在反聚束效应。

对于共振荧光，用量子力学理论计算出用光场算符表示的相关函数 $g^{(2)}_{(\tau)}$，结果表明[5]，当用弱光场激发时，拉比频率 $\Omega_R\ll\gamma_a$，

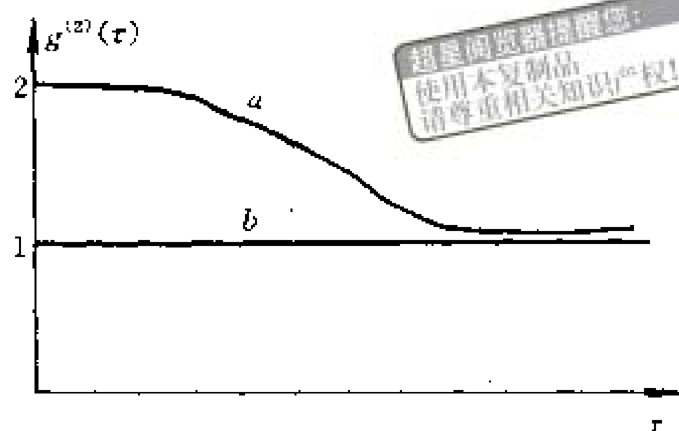


图 3-3-2　热光源和激光的强度相关

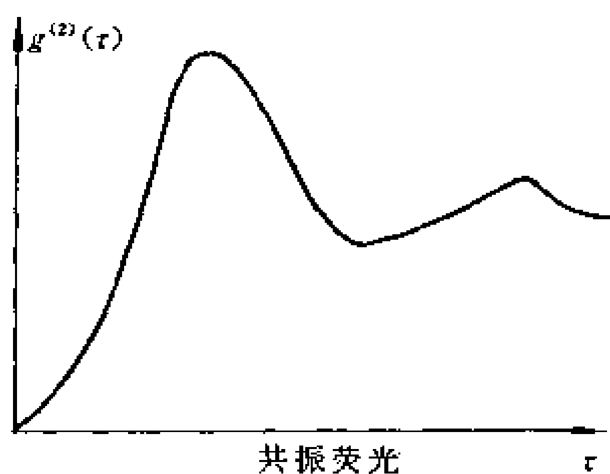


图 3-3-3　共振荧光的强度相关

$g^{(2)}_{(\tau)}$为

$$g^{(2)}_{(\tau)} = (1 - e^{-\gamma_a \tau/2})^2 \tag{3-3-6}$$

当用强光场激发时，拉比频率 $\Omega_R \gg \gamma_a$，$g^{(2)}_{(\tau)}$为

$$g^{(2)}_{(\tau)} = (1 - e^{-\frac{3}{4}\gamma_a \tau}\cos\Omega_R) \tag{3-3-7}$$

对于黑体辐射光源，若光谱线线型函数为洛仑兹函数时，$g^{(2)}_{(\tau)}$为

$$g^{(2)}_{(\tau)} = 1 + e^{-\gamma_a \tau} \tag{3-3-8}$$

对于单模激光，光子服从泊淞分布律，所以 $g^{(2)}_{(\tau)}$为

$$g^{(2)}_{(\tau)} = 1 \tag{3-3-9}$$

光子的聚束、反聚束和不聚束效应，与光源发出的光子服从的

统计分布律有关，在第六章还要讨论这方面问题。

参考文献

[1] Hartig W et al. Z. Phys, A 278,1976, 205

[2] Kogelnik H et al. IEEE. J. Quantum Electronics, QE-8, 1972, 373

[3] Lax M. Phys. Rev, Vol 129, 1963,2342

[4] Mollow B R. Phys. Rev, A, Vol 5,1972,1522

[5] Cresser J D et al. in "Dissipative Systems in Quantum Optics", ed by R. Baonifacio. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1982, 21

Mollow B R. ibid. 11

第四章　光学双稳态

本章讨论光学双稳态的基本原理。对光学双稳态过程进行理论分析，最后建立光学双稳态系统的池田(Ikeda)方程。

§4-1　光学双稳态

光学双稳态是光通过某种光学系统，对应一种入射光强，存在两种稳定的输出光强状态——较高透过状态和较低透过状态，光强度发生非线性变化。光学双稳态系统是一个远离平衡态的系统，它的典型特性曲线如图 4-1-1 所示。

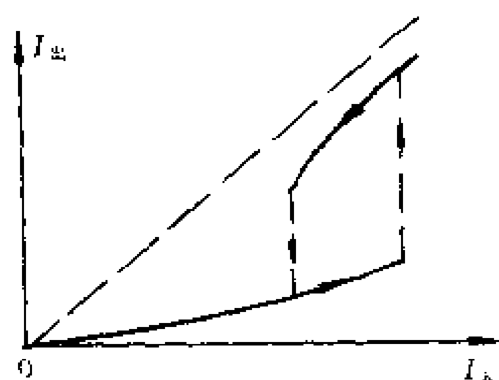


图 4-1-1　光学双稳态特性曲线

随着入射光强增加达到某一阈值时，光学双稳态系统开始失稳，这时可能出现以下三种情形：(1)系统出现定态双稳性，即系统从原来的稳态跃迁到新的稳定状态；(2)系统出现不稳定性，光学双稳态系统的输出光强随时间周期性变化，称此为自脉动；(3)系统进入混沌。本章分析定态双稳性，关于光学双稳态系统的不稳定性和混沌问题，放在下一章讨论。

光学双稳态的原理，最早是在 1969 年提出的[1]，当时建议以含有饱和吸收介质的法布里-珀罗干涉仪作为光学双稳态系统，当入射光通过该系统时，引起腔内介质的共振饱和吸收，介质的吸收

系数是腔内光强的函数，以此实现光学双稳态。具体提出用 SF_6 作为共振吸收介质，将其放入法-白腔内，以 CO_2 激光器输出的激光作为输入。按这种原理进行的实验，当时没有观察到光学双稳态现象，仅观察到脉冲变窄和光信号延迟现象，这是因为腔内吸收气体的非线性吸收特性变化不明显的缘故。虽然后来有人用过不同的物质作为饱和吸收介质进行这一实验，但仍没有观察到光学双稳态现象。1976 年，吉布斯(H. M. Gibbs)等人公布了第一个光学双稳态实验结果[2]，他们采用 Na 蒸汽作为法-白腔内的介质，使用可调谐染料激光器输出的激光，在 Na 蒸汽 D 共振线频率范围内进行共振激发，在实验上观察到光学双稳态现象。分析表明，这是由近共振范围内的非线性色散引起的，就是说，法-白腔内 Na 蒸汽的折射率对腔内光强产生的依赖关系所引起的，不是由共振吸收的饱和引起的。看来依靠介质的折射率非线性效应比起非线性共振吸收，更容易观察到光学双稳态现象。到目前，已经知道的光学双稳态的具体物理机制不下十几种，方式方法多种多样，但总的来说基本上可分为全光学型光学双稳态系统和混合型光学双稳态系统两大类。

首先分析光学双稳态的物理过程，由物理光学知道，入射到法-珀干涉仪的光强 I_i 与透射出的透射光强 I_t 之间，有下列关系

$$I_t = \frac{1}{1 + F\sin^2\dfrac{\theta}{2}} I_i \tag{4-1-1}$$

法-珀干涉仪内部的光强 I 与入射光强 I_i 之间有下列关系

$$I = \frac{1+R}{1-R} \frac{1}{1 + F\sin^2\dfrac{\theta}{2}} I_i \tag{4-1-2}$$

在以上公式中，$F = 4R/(1-R)^2$，R 为法-珀干涉仪两个反射镜的反射率，θ 是法珀干涉仪内发生多光束干涉时两相邻透射光束的位相差。法-珀干涉内介质在强的入射光作用下，折射率发生非线性变化，折射率 n 为

$$n = n_0 + n_2E^2 = n_0 + n_2I \tag{4-1-3}$$

式中 E 为作用在介质上的光的电场强度，n_0 为普通折射率，n_2 由介质的三阶非线性电极化率 $\chi^{(3)}$ 决定

$$n_2 = \frac{2\pi}{n_0}\chi^{(3)} \tag{4-1-4}$$

θ 为

$$\theta = \frac{4\pi}{\lambda}L(n_0 + n_2I)\cos\alpha \tag{4-1-5}$$

式中 L 为法-珀干涉仪两面反射镜之间的距离，α 为在法-珀干涉仪内平面波传播方向与镜面法线之间夹角。现在讨论透射光强 I_t 与入射光强 I_i 之间关系，为此引入

$$T = \frac{I_t}{I_i} \tag{4-1-6}$$

由(4-1-1)和(4-1-5)式得到

$$T = \frac{1}{1 + F\sin^2\frac{1}{2}(\theta_0 + \beta I)} \tag{4-1-7}$$

式中

$$\theta_0 = \frac{4\pi}{\lambda}n_0L\cos\alpha \tag{4-1-8}$$

它是弱光入射下的 θ 值，$\beta = 4\pi Ln_2\cos\alpha/\lambda$。又由(4-1-2)式得到

$$T = \frac{1-R}{1+R}\frac{1}{I_i}I \tag{4-1-9}$$

(4-1-7)式表明，T 与法-珀干涉仪内光强 I 之间为周期变化关系，如图 4-1-2 所示；而(4-1-9)式表明，T 与 I 之间为直线关系，直线斜率为 $(1-R)/(1+R)I_i$。通过作图，可以求出 T 与 I_i 的关系曲线。当 I_i 足够强时，(4-1-9)式表示的直线斜率很小，它与图 4-1-2 上的曲线可以有两个或多个交点，即在一定的入射光强下，可以有两个或多个输出光强。适当选择 R 和 θ_0，可得到图 4-1-3 所示的光学双稳态特性曲线。

1976 年吉布斯等人的第一个光学双稳态实验，属于纯光学控制的全光学型光学双稳态系统。在实验中用的法-珀干涉仪，两镜

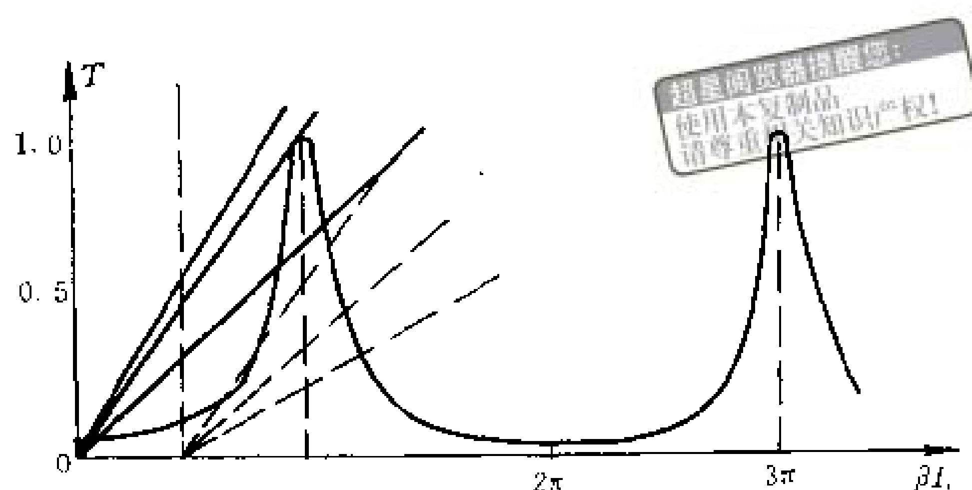


图 4-1-2　T-I_t 关系曲线

面间距 $L=11\text{cm}$，镜面反射率 $R=90\%$。双稳开关的上升时间为 1-10μs，下降时间为 20μs。

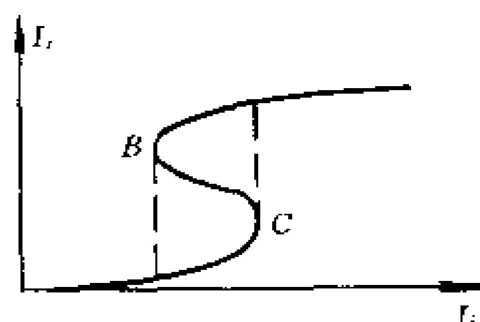


图 4-1-3

纯光学型光学双稳态系统，一般要求入射信号强，并且对波长有一定的选择，为克服这些限制，可通过外加的反馈方法控制介质折射率的变化，所以发展了混合型光学双稳态系统。最先实现的是电光混合型光学双稳态系统，实验装置如图 4-1-4 所示。法-珀干涉仪内的介质是电光晶体，在晶体上不加外电场时，对于弱的入射光，晶体折射率不产生非线性变化；如将法-珀干涉仪输出端的一部分透射光，取样入射到光电探测器

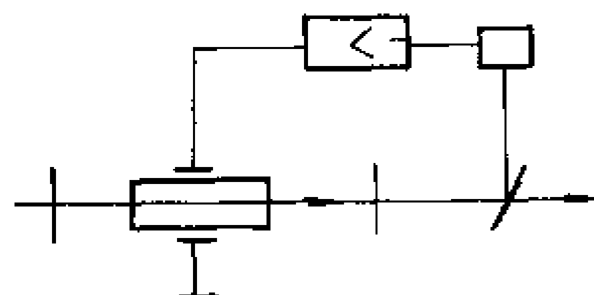


图 4-1-4　电光混合型光学双稳态系统

上，并对产生的电压信号进行放大，再加到晶体上，将引起电光晶体折射率的变化，它与法-珀干涉仪内的光强成正比，所以能够出现光学双稳态现象。

声光混合型光学双稳态系统有两种，一种是布拉格型，另一种是喇曼-奈兹型。行波布拉格声光光学双稳态系统如图 4-1-5 所示，声光调制器的晶体中当有超声波场时，对于入射光，此时的晶体相当于一个位相光栅，透射光出现衍射，衍射光通过狭缝入射到光电探测器上，输出的电压经过延时器延迟后，被放大器放大，再加到声光驱动器上，引起超声场变化，它与入射光强直接有关，出现声光系统的光学双稳态现象。

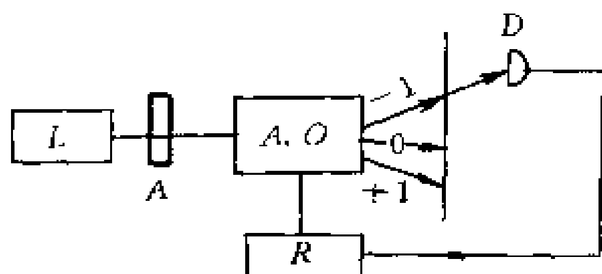


图 4-1-5　布拉格型声光混合型光学双稳态系统

L—激光器，A—衰减器，A·O—声光调制器，R—驱动器，D—探测器

喇曼-奈兹声光衍射现象，也被用于实现光学双稳态。

混合型光学双稳态系统种类繁多，一般而言可等效于由传输系统和反馈系统两部分组成，等效方框图如图 4-1-6 所示，其中 SM 为传输系统，DB 以及 B 到 ϕ 间的转换元件组成反馈系统。M 为光分束器，D 为光电探测器，S 为声光或电光调制器，B 为反馈放大器。系统的工作过程是到达 M 的输出光，分束到光电探测器 D 进行光电转换，电信号被 B 放大和反馈，控制调制器 S 的控制参量 ϕ。现在建立系统的方程，设系统的响应函数为 $G(t)$，若系统是对时间 t 可平移不变的线性系统，输出 y 与输入信号 z 之间关系为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}G(t-\tau)z(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (4\text{-}1\text{-}10)$$

图 4-1-6 混合型光学双稳系统方框图

设系统的响应函数为

$$G(t) = ge^{-\kappa t} \tag{4-1-11}$$

初始条件为

$$y(t)\big|_{t=0} = y_0 \tag{4-1-12}$$

由(4-1-10)式得到

$$y(t) = y_0 + \int_0^t ge^{-\kappa(t-\tau)} z(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-1-13}$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -\kappa[y(t) - y_0] + gz(t) \tag{4-1-14}$$

容易看出，κ 为系统的损耗率，令 $\tau = 1/\kappa$ 为传输系统的时间常数，$T(\phi) = g/\kappa$ 为声光或电光调制器的稳态透过率函数，对于传输系统，由上式得到下列方程：

$$\tau_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = y_0 + T(\phi)z \tag{4-1-15}$$

对反馈系统，同样有下列方程

$$\tau_2 \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} + \phi(t) = \phi_0 + \beta z \tag{4-1-16}$$

上式中 τ_2 为反馈系统的时间常数，ϕ_0 为加在声光或电光调制器上的初始偏压，β 为反馈系统的传输系数，即增益系数。

使用上述结果，分析布拉格型声光光学双稳态系统。当系统稳定工作时，对于布拉格声光衍射，系统的透过率函数

$T=\sin^2(\pi u_M/b)$，u_M 是加在驱动器上的调制电压，b 是由声光系统性质决定的系数。由(4-1-15)式直接得到布拉格声光调制器中的衍射光强 I_d 为

$$u_D \sim I_d = I_L \sin^2(\frac{\pi}{b}u_M) \qquad (4\text{-}1\text{-}17)$$

上式中 u_D 是作为反馈用的光电探测器产生的电压，I_L 为入射光强。对于反馈系统，在稳态时由(4-1-16)式直接得到

$$u_M = \beta u_D + u_0 \qquad (4\text{-}1\text{-}18)$$

上式中 u_0 是加在声光调制器上的偏压。

由方程(4-1-17)和(4-1-18)式描写的布拉格型声光系统，可以有三种可能的运转方式，使其输出与输入之间出现回线关系：

(1)改变入射光强。图 4-1-7 上的曲线是在不同入射光强下，由(4-1-17)式给出的。图上的反馈直线是由(4-1-18)式给出的，它从 $u_M=u_0$ 开始，图上的 I_S 和 I_C 分别对应系统的较高和较低的双稳态限，运转点 u_0 要选择得使反馈直线穿过 I_S 和 I_C 之间的 I_1 曲线。

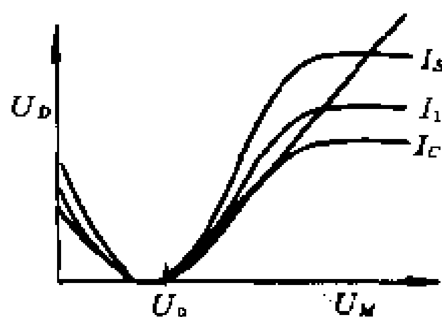


图 4-1-7 改变入射光强

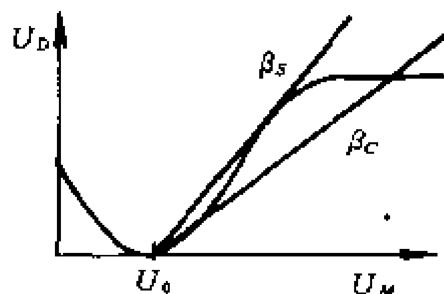


图 4-1-8 改变反馈环中的增益系数

(2)改变反馈环中的增益系数。当固定入射光强，由于反馈直线正比于 β，可通过改变 β 使系统状态发生变化。图 4-1-8 表示这种情形下系统的工作曲线，β_S 和 β_C 是发生光学双稳态的极大和极小增益系数。

(3)改变偏压 u_0。当固定入射光强和增益系数，改变偏压 u_0，得到图 4-1-9 所示的工作曲线，u_S 和 u_C 是系统状态发生变化的开

关值。

图 4-1-10 是一组布拉格型声光光学双稳态的实验结果[3]，在不同的增益 β 情形下，通过调谐偏压得到的。

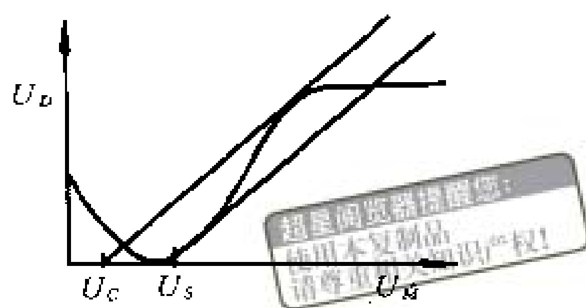


图 4-1-9 改变偏压 u_0

对于喇曼-奈兹型声光光学双稳态系统，可以进行类似分析。在稳态时，由(4-1-15)和(4-1-16)式

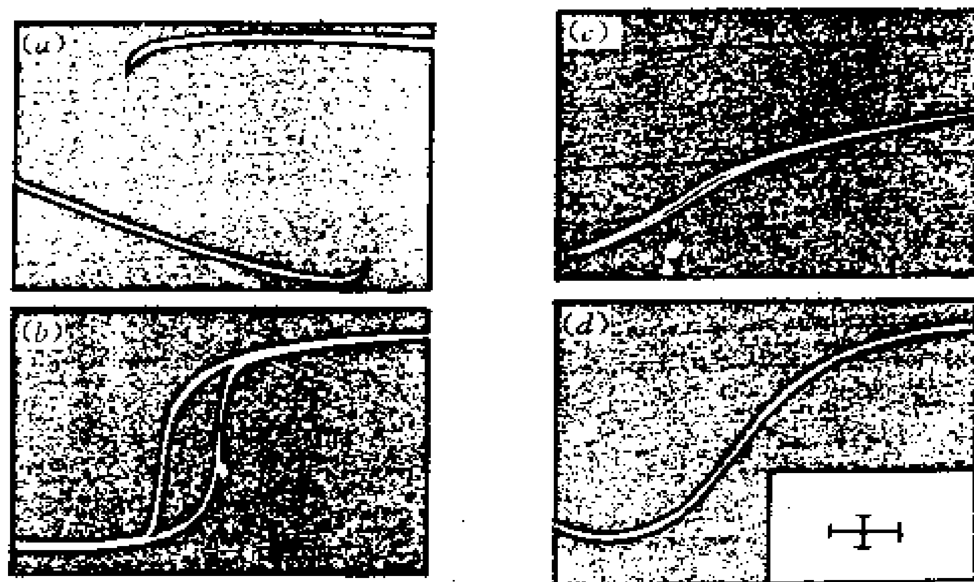


图 4-1-10

(a) $\beta=5$，(b) $\beta=2$

(c) $\beta=1$，(d) 无反馈

得到传输系统的光强之间的关系式和反馈系统的关系式为

$$I_t = T_m I_i \tag{4-1-19}$$

$$u = u_B + \beta I_t \tag{4-1-20}$$

上式中 u_B 为偏置宗量，它与声光调制器上的偏压成正比。喇曼-奈兹声光衍射系统的透过率函数为

$$T_m = J_m^2(au) \tag{4-1-21}$$

式中 J_m 为第一类 m 阶贝塞尔函数，m 与声光衍射的级次对应，a 为系数。当取一级衍射光为反馈系统提供反馈时，系统的方程为

$$I_t = T_1(u)I_i \tag{4-1-22}$$

$$u = U_B + \beta I_t \tag{4-1-23}$$

$$T_1(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(u)J_{n-1}^2(u/\alpha) \tag{4-1-24}$$

式中 α 代表入射声波与反射声波幅度之比。适当选择 α、β 和 U_B，由(4-1-22)-(4-1-24)式，可给出系统的输出与输入光强之间的回线关系，如图 4-1-3 所示，其中 CB 段对应的状态，可以证明是不稳定的，所以系统出现双稳状态。

上面以声光光学双稳态系统为例，说明了混合型光学双稳态的过程。实际上，光学双稳态系统的具体种类相当繁多，从产生光学双稳现象的介质来看，有半导体、固体、凝聚态物质、有机材料、气体以及等离子体等；从结构来看，除一般常见的形式，还有薄膜、波导等，系统的开关响应时间，也越来越短。

§4-2 光学双稳态的理论分析

现在从理论上具体分析纯吸收型光学双稳态系统和色散型光学双稳态系统的物理过程。系统产生光学双稳性实际上是光场与二能级原子系统相互作用的结果，所以首先从量子理论出发，建立描写光学双稳态的平均场理论方程，然后建立光学双稳态的状态方程，在此基础上分析介质的单原子状态和原子合作状态对光学双稳态的作用，并对吸收型光学双稳态和色散型光学双稳态进行比较讨论。

一、光学双稳态系统的平均场理论方程

现在从量子统计理论出发建立光学双稳态的平均场理论方程。首先研究系统的哈密顿算符。光场与二能级原子的相互作用哈密顿算符 $\hat{H}'$，由(1-8-16)式，为

$$\hat{H}' = -\hat{\mu}\cdot\hat{\boldsymbol{E}} \tag{4-2-1}$$

由(1-7-40)式，光的电场强度算符 $\hat{\boldsymbol{E}}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{i}\sum_{l}\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\boldsymbol{u}_l[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}\hat{b}_l^{+}(t)] \tag{4-2-2}$$

二能级原子的电偶极矩算符 $\hat{\mu}$，由(1-6-11)可表示为

$$\hat{\mu} = \mu_r\hat{j}_1 - \mu_i\hat{j}_2 \tag{4-2-3}$$

若选 $\mu_i=0$，则得到

$$\hat{\mu} = \mu_r\hat{j}_1 = \mu\boldsymbol{u}_d\hat{j}_1 \tag{4-2-4}$$

对于 N 个二能级原子，引入

$$\hat{J}_1 = \sum_{n=1}^{N}\hat{j}_{1,n} \tag{4-2-5}$$

用上升算符 $\hat{J}^{+}$ 和下降算符 $\hat{J}^{-}$ 表示符 $\hat{J}_1$

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2}(\hat{J}^{+} + \hat{J}^{-}) \tag{4-2-6}$$

对于算符 $\hat{J}^{\pm}$ 如第二章第四节那样，引用倒格子模表示，对于光场使用(2-4-32)式表示的算符 $\hat{F}$，将(4-2-2)-(4-2-6)式代入(4-2-1)式，并取旋波近似，得到 N 个二能级原子与光场相互作用的哈密顿算符为

$$\hat{H}' = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\mu\boldsymbol{u}_l\cdot\boldsymbol{u}_d(\hat{F}^{+}\hat{J}^{-} - \hat{F}\hat{J}^{+}) \tag{4-2-7}$$

设二能级原子的 μ^2 在直角坐标系的三个分量均分，则以 $\mu^2/3$ 代替上式中的 μ^2，并令 $\omega_l=\omega_0$，则上式为

$$\hat{H}' = \mathrm{i}\left(\frac{\hbar\omega_0}{6\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\mu\boldsymbol{u}_l\cdot\boldsymbol{u}_d(\hat{F}^{+}\hat{J}^{-} - \hat{F}\hat{J}^{+}) \tag{4-2-8}$$

令

$$g = \left(\frac{\hbar\omega_0}{6\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\mu\boldsymbol{u}_d\cdot\boldsymbol{u}_l \tag{4-2-9}$$

则相互作用哈密顿算符为

$$\hat{H}' = \mathrm{i}g(\hat{F}^{+}\hat{J}^{-} - \hat{F}\hat{J}^{+}) \tag{4-2-10}$$

这样 N 个二能级原子与光场组成的系统的总哈密顿算符 $\hat{H}$ 为

$$\hat{H} = \hbar(\omega_C - \omega_0)\hat{F}^+ \hat{F} + \hbar(\omega_A - \omega_0)\hat{J}_3 + \mathrm{i}g(\hat{F}^+ \hat{J}^- - \hat{F}\hat{J}^+) \tag{4-2-11}$$

式中 ω_A 是二能级原子的跃迁频率，ω_0 为入射光的频率，ω_C 为腔的共振频率。

设 $w_S(t)$ 是在薛定谔表象中二能级原子与光场组成的系统的统计算符，使用可确定入射光频率的表象，则

$$w(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t} w_S(t) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}$$

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0(\hat{F}^+ \hat{F} + \hat{J}_3)$$

统计算符 $w(t)$ 服从方程

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}, w(t)] + \Gamma_F w(t) + \Gamma_A w(t) \tag{4-2-12}$$

式中

$$\Gamma_F w(t) = \sigma\{[(\hat{F} - \alpha_i), w(t)(\hat{F} - \alpha_i)^+] + [(\hat{F} - \alpha_i)w(t), (\hat{F} - \alpha_i)^+]\}$$

表示光场的损耗，其中 α_i 与入射光场 E_I 成正比

$$\alpha_i = \left(\frac{3\varepsilon_0 V}{2\hbar\omega_0}\right)^{1/2} \mu \frac{E_I}{\sqrt{T}} \tag{4-2-13}$$

T 表示法-珀干涉仪反射镜的透过率，光的损耗系数 σ 为

$$\sigma = \frac{cT}{2L} \tag{4-2-14}$$

式中 L 为法-珀干涉仪反射镜间距离。(4-2-12)式中的 $\Gamma_A w(t)$ 为

$$\Gamma_A w(t) = \sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{\gamma_\parallel}{2}([\hat{j}_n^-, w(t)\hat{j}_n^+] + [\hat{j}_{3n} w(t), \hat{j}_{3n}]) + \left(\gamma_\perp - \frac{\gamma_\parallel}{2}\right)([\hat{j}_{3n}, w(t)\hat{j}_{3n}] + [\hat{j}_{3n} w(t), \hat{j}_{3n}])\right\}$$

表示原子弛豫过程引起的衰减。

将以上表示式代入(4-2-12)式，根据算符对易关系，按第二章第四节的过程进行类似的推导，得到下列的算符平方值方程

$$\langle \dot{\hat{J}}^- \rangle = \frac{2g}{\hbar}\langle \hat{F}\hat{J}_3 \rangle - (\gamma_\perp + \mathrm{i}\delta_{A0})\langle \hat{J}^- \rangle$$

$$\langle\dot{\hat{J}}_3\rangle = -\frac{g}{\hbar}(\langle\hat{F}\hat{J}^+\rangle + \langle\hat{F}^+\hat{J}^-\rangle) - \gamma_\parallel(\langle\hat{J}_3\rangle + \frac{N}{2})$$

$$\langle\dot{\hat{F}}\rangle = \frac{g}{\hbar}(\langle\hat{J}^-\rangle - \sigma(\langle\hat{F}\rangle - \alpha_i) - \mathrm{i}\delta_{C0}\langle\hat{F}\rangle$$

取近似



$$\langle\hat{F}\hat{J}_3\rangle \simeq \langle\hat{F}\rangle\langle\hat{J}_3\rangle$$

等等，引入下列符号

$$R = -\langle\hat{J}^-\rangle = -\langle\hat{J}^+\rangle \tag{4-2-15}$$

$$D = -\langle\hat{J}_3\rangle \tag{4-2-16}$$

$$E = 2(\frac{\hbar\omega_0}{6\epsilon_0 V})^{1/2}\langle\hat{F}\rangle \tag{4-2-17}$$

则上面三个方程变为

$$\dot{R} = \frac{\mu}{\hbar}ED - (\gamma_\perp + \mathrm{i}\delta_{A0})R \tag{4-2-18}$$

$$\dot{D} = \frac{\mu}{2\hbar}(E^*R + ER^*) - \gamma_\parallel(D - \frac{N}{2}) \tag{4-2-19}$$

$$\dot{E} = -\bar{g}R - \sigma(E - \frac{E_I}{\sqrt{T}}) - \mathrm{i}\delta_{C0}E \tag{4-2-20}$$

式中 $\bar{g}$ 为

$$\bar{g} = \frac{\omega_0\mu}{3\epsilon_0 V} \tag{4-2-21}$$

$$\delta_{A0} = \omega_A - \omega_0, \qquad \delta_{C0} = \omega_C - \omega_0$$

二、纯吸收型光学双稳态

现在讨论纯吸收型光学双稳态的物理过程，此时 $\delta_{A0}=0$，$\delta_{C0}=0$，E 和 R 都取实数，则(4-2-18)—(4-2-20)式为

$$\dot{R} = \frac{\mu}{\hbar}ED - \gamma_\perp R \tag{4-2-22}$$

$$\dot{D} = -\frac{\mu}{\hbar}ER - \gamma_\parallel(D - \frac{N}{2}) \tag{4-2-23}$$

$$\dot{E} = -\bar{g}R - \sigma(E - \frac{E_I}{\sqrt{T}}) \tag{4-2-24}$$

从上面三个方程可以求出描写纯吸收型光学双稳态的状态方程。现在讨论这三个方程的稳态性质，令

$$\dot{R} = 0, \qquad \dot{D} = 0, \qquad \dot{E} = 0 \tag{4-2-25}$$

并引入透射光场和入射光场参数 x 和 y

$$x = \frac{\mu E}{\hbar\sqrt{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}}} = \frac{\mu E_T}{\hbar\sqrt{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}T}} \tag{4-2-26}$$

$$y = \frac{\mu E_I}{\hbar\sqrt{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}T}} \tag{4-2-27}$$

则得到(4-2-22)—(4-2-24)式的稳态解为

$$R_S = \frac{N}{2}(\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}})^{1/2}\frac{x}{1+x^2} \tag{4-2-28}$$

$$D_S = \frac{1}{2}N\frac{1}{1+x^2} \tag{4-2-29}$$

代入稳态时的(4-2-24)式，得到光学双稳态系统的状态方程为[4]

$$y = x + \frac{2Cx}{1+x^2} \tag{4-2-30}$$

式中的 C 为

$$C = \frac{\gamma_{\parallel}}{2\gamma_{\perp}} \tag{4-2-31}$$

$$\gamma_u = \frac{\omega_0\mu^2 N}{6\hbar\varepsilon_0 V\sigma} \tag{4-2-32}$$

由(2-4-97)式看出 $\gamma_u^{-1}=\tau_R$，是超荧光特征时间的倒数。可见(4-2-30)式中的参数 C 是原子的合作参数，表示原子的合作衰减速率与非合作衰减速率的比值。使用(4-2-26)和(4-2-27)式可将(4-2-30)式表示为输入光场 E_I 与透射(输出)光场 E_T 之间的关系为

$$E_I = E_T + \frac{2CE_T}{1+\frac{E_T^2}{I_S}} \tag{4-2-33}$$

式中的 I_S 为

$$I_S = \frac{\mu^2}{T\hbar^2\gamma_\perp \gamma_\parallel} \tag{4-2-34}$$

是系统的饱和参数。

现在讨论(4-2-30)式和(4-2-33)式。由(4-2-30)式看出 x 和 y 的关系实际上要求解三次方的代数方程确定，所以 E_T 是 E_I 的多值函数。如果忽略该方程右端的含 C 的项，则得到 $x=y$，这是单个原子参与光作用的过程。方程右端的合作项代表一种非线性吸收项，这项给出这里采用的模型有趣的特点。可饱和结构是由 R 对 x 的饱和关系产生的，在饱和区域 $x\gg1$，方程中的合作项可以忽略；而在非饱和区域，则给出双稳态图象。可见合作参数 C 在光学双稳态过程中的作用。

根据 C 值的不同，函数 $y(x)$ 具有不同的曲线形式，如图 4-2-1 所示。由图看出 $C=4$ 是分开两种物理过程的临界值，对于 $C<4$，

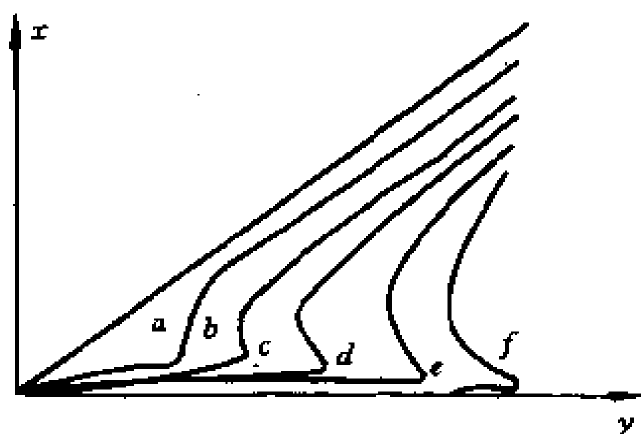


图 4-2-1 (a) $C=0$，(b) $C=4$，(c) $C=8$，(d) $C=12$，(e) $C=16$，(f) $C=20$

y 是 x 的单调函数，反函数 $x(y)$ 也是单值的，透射光随入射光单调地连续增加，与 x 值有关的其它值，也是连续变化的，这与单原子理论结果一致。

对于 $C>4$ 情形，y 是 x 的多值函数，如图 4-2-2 所示，在 y_M 和 y_m 处，x 有极大值 x_M 和极小值 x_m：

$$X_M = \left[\frac{2C + 1}{C - 1 - (C^2 - 4C)^{1/2}}\right]^{1/2} \tag{4-2-35}$$

$$X_m = \left[C - 1 + (C^2 - 4C)^{1/2}\right]^{1/2} \tag{4-2-36}$$

分析表明,对于 $y<y_m$,方程只有一个解 x_1;对于 $y>y_M$,方程也只

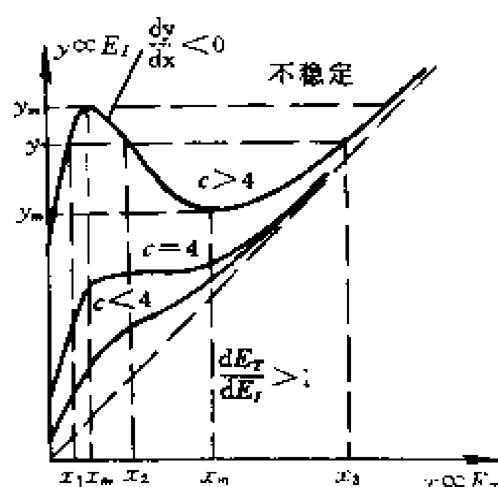


图 4-2-2

有一个解 x_3,对于 $y_m<y<y_M$ 方程有三个解:$x_1<x_2<x_3$。图 4-2-2 是在 $C>20$ 情形下画出的,下面的线性稳定性分析表明,x_1 和 x_3 是稳定的,x_2 是不稳定的。

对于 $y>C$,x_3 实际上与单原子解相同,称 x_3 为单原子稳定态;x_1 来源于原子的合作过程,称为合作稳定态,下面就来分析这些结论。对于 $C\gg1$ 情形,由(4-2-35)、(4-2-36)和(4-2-30)式得到

$$x_M \simeq 1 \tag{4-2-37}$$

$$y_M = C \tag{4-2-38}$$

$$x_m \simeq \sqrt{2C} \tag{4-2-39}$$

$$y_m = \sqrt{8C} \tag{4-2-40}$$

看出随着 C 增加,y_M 增加,光学双稳态系统开关阈值增加。在方程(4-2-30)式中略去 x 项,可近似得到 x_1

$$x_1 = \frac{y}{C + (C^2 - y^2)^{1/2}} \tag{4-2-41}$$

上式在 $y<y_m\simeq\sqrt{8C}$时，有下列线性关系

$$x_1\simeq\frac{y}{2C}\ll 1 \tag{4-2-42}$$

当 $y=\sqrt{8C}$时，x_1 为

$$x_1=(\frac{2}{C})^{1/2} \tag{4-2-43}$$

当忽略(4-2-30)式中的$(1+x^2)$项中的 1 时，可近似得到 x_3 为

$$x_3=\frac{y}{2}[1+(1-\frac{8C}{y^2})^{1/2}] \tag{4-2-44}$$

对于 $y>y_M\simeq C$，有线性关系

$$x_3\simeq y\gg 1 \tag{4-2-45}$$

可见，当 $y>C$ 时，x_3 与单原解相同。

将上述分析综合如下，对于 $C>4$ 和 $y_m<y<y_M$，系统具有双稳性，y-x 间有滞后环关系，如图 4-2-3 所示。当入射光场(y)从零开始增加，透射光场(x)连续增加，直到 $E_I=E_I^{(+)}$，$y=c$ 时，由(4-2-41)式得到 $x_1=1$，在 x_1 处出现间断，这是因为 $y>C$ 时，(4-2-41)式无解。透射光场从合作稳态突然跳跃到单原子状态，由(4-2-44)式得到，此时 $x_3=C$。对于 $y>y_M\simeq C$，由(4-2-44)式得到 $x_3\simeq y$

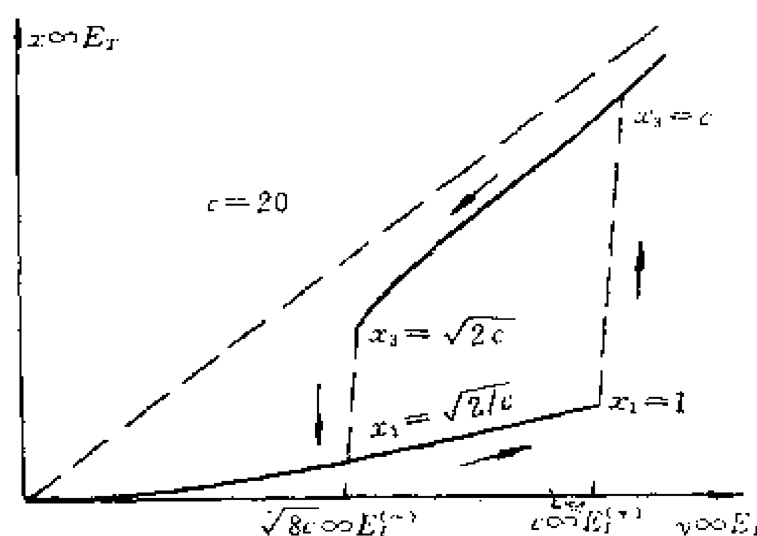


图 4-2-3

$\gg 1$，x 与 y 之间又有线性关系。所以从 $E_I > E_I^{(+)}$ 处减小 E_I，则透射光场也连续减少，直到 $E_I = E_I^{(-)}$ 时，即 $y = \sqrt{8C}$ 时，由(4-2-44)式得到 $x_3 = \sqrt{2C}$。若 y 再减少，x_3 也无解，所以要突然变到 x_1。此时由(4-2-41)式得到 $x_1 = \sqrt{2/C}$，透射光场又突然从单原子稳态跃迁到合作状态，整个过程形成一个如图 4-2-3 所示的滞环。$E_I^{(+)}$ 和 $E_I^{(-)}$ 是两个相变点。

有趣的是在 x-y 之间有滞后作用的同时，$N_2 = \frac{N}{2} - D_S$ 与入射光场 y 之间以及 R 与入射光场 y 之间都有滞后效应如图 4-2-4(a)和图 4-2-4(b)所示。

光学双稳态系统的输出光强与介质的原子数 N_2 有关。下面对单个原子稳态和原子合作稳态作进一步分析，当系统处于单原子稳态时，这时介质中的原子数 $N_2^{(3)}$ 为

$$N_2^{(3)} = \frac{N}{2} - D_S \tag{4-2-46}$$

将(4-2-29)式代入上式得到

$$N_2^{(3)} = \frac{N}{2}\frac{x_3^2}{1 + x_3^2} \simeq \frac{1}{2}N \tag{4-2-47}$$

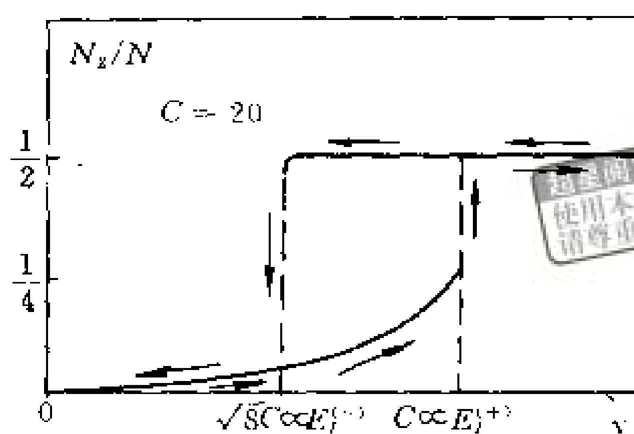
所以透射光强 $I_t \propto N$，这是因为光场与单个原子分别相互作用，这种作用不受其它原子存在的影响，所以入射光场的饱和参数大，原子达到饱和，吸收很小，介质实际上是透明的，这样，系统出现高透过率状态，对应双稳态曲线的上支。当系统中介质的原子处于合作状态时，介质中的原子数 $N_2^{(1)}$ 为

$$N_2^{(1)} = \frac{N}{2}\frac{x_1^2}{1 + x_1^2} \tag{4-2-48}$$

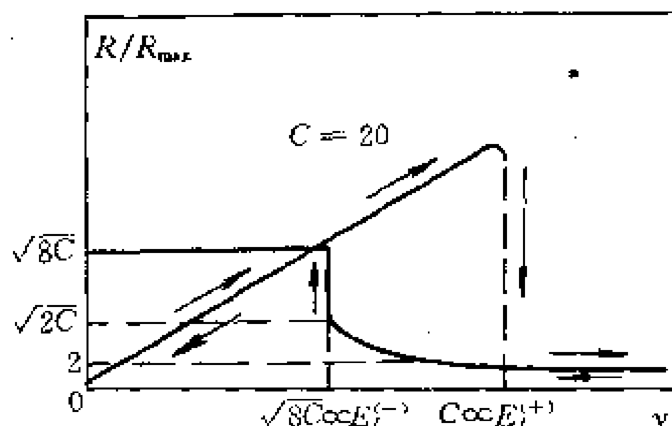
将(4-2-41)式代入，得到

$$N_2^{(1)} = \frac{N}{4C^2}\frac{y^2}{1 + \sqrt{1 - y^2/C^2}} \tag{4-2-49}$$

在合作稳态时，原子合作参数 $C \propto N$，所以 $N_2 \propto 1/N$，这时透射光



(a)



(b)

图 4-2-4　滞后效应

强 $I_t\propto 1/N$，这是原子合作效应特征。在这种情形，入射光场与介质的原子群整体相互作用，原子合作产生反作用场为

$$E_r = E - \frac{E_I}{\sqrt{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}}(E_T - E_I) \qquad (4\text{-}2\text{-}50)$$

由稳态时的(4-2-24)式求得 E_r 为

$$E_r = -\frac{\bar{g}}{\sigma}R \qquad (4\text{-}2\text{-}51)$$

它对入射光场进行反作用，入射光被强烈吸收反射，所以系统透过率低，系统出现低透射状态，对应双稳态曲线的下支。

最后进行线性稳定性分析，研究图 4-2-2 上曲线表示的状态

的稳定性问题。用 R_S、D_S 和 E_S 表示(4-2-22)-(4-2-24)式的一般稳定解，令

$$\delta R = R(t) - R_S \tag{4-2-52}$$

$$\delta D = D(t) - D_S \tag{4-2-53}$$

$$\delta E = E(t) - E_S \tag{4-2-54}$$

对(4-2-22)—(4-2-24)式求变分，若只保留 δR、δD 和 δE 的线性项，得到

$$\delta\dot{R} = -\gamma_{\perp}\,\delta R + \frac{\mu}{\hbar}E_S\delta D + \frac{\mu}{\hbar}D_S\delta E_S \tag{4-2-55}$$

$$\delta\dot{D} = -\frac{\mu}{\hbar}E_S\delta R - \frac{\mu}{\hbar}R_S\delta E - \gamma_{\parallel}\,\delta D \tag{4-2-56}$$

$$\delta\dot{E} = -\bar{g}\delta R - \sigma\delta E \tag{4-2-57}$$

设解

$$\begin{vmatrix} \delta R \\ \delta D \\ \delta E \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{\alpha t}\begin{vmatrix} R_S \\ D_S \\ E_S \end{vmatrix} \tag{4-2-58}$$

上式中 α 是待定系数，当 α 为负的实数时，系统稳定，下面求 α 满足的方程，为此将(4-2-58)式对时间微商，得到

$$\begin{vmatrix} \delta\dot{R} \\ \delta\dot{D} \\ \delta\dot{E} \end{vmatrix} = \alpha\mathrm{e}^{\alpha t}\begin{vmatrix} R_S \\ D_S \\ E_S \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} \delta R \\ \delta D \\ \delta E \end{vmatrix} = M\begin{vmatrix} \delta R \\ \delta D \\ \delta E \end{vmatrix} \tag{4-2-59}$$

上式中 α 是特征矩阵 M 的特征值，由(4-2-55)—(4-2-57)式得到

$$M = \begin{vmatrix} -\gamma_{\perp} & \frac{\mu}{\hbar}E_S & \frac{\mu}{\hbar}D_S \\ -\frac{\mu}{\hbar}E_S & -\gamma_{\parallel} & -\frac{\mu}{\hbar}R_S \\ -\bar{g} & 0 & -\sigma \end{vmatrix} \tag{4-2-60}$$

α 由特征方程

$$|M - \alpha I| = 0 \tag{4-2-61}$$

给出，上式中 I 是单位矩阵，由上式得到

$$\alpha^3 + b_2\alpha + b_1\alpha + b_0 = 0 \tag{4-2-62}$$

式中 $$b_2=\gamma_\perp+\gamma_\parallel+\sigma \tag{4-2-63}$$

$$b_1=\gamma_\perp\gamma_\parallel+\sigma(\gamma_\perp+\gamma_\parallel+D_S)+(W_\Omega-R_S)^2 \tag{4-2-64}$$

$$b_0=\sigma[(\gamma_\perp+D_S)\gamma_\parallel+(W_\Omega-R_S)(W_\Omega-2R_S)] \tag{4-2-65}$$

上式中 $W_\Omega=\mu E_I/\hbar\sqrt{T}$，如果问题有稳定解，要求(4-2-62)式的所有根有负的实部，使用罗兹-华维兹(Routh-Hurwith)定理，得到稳定性条件为

$$b_0>0 \tag{4-2-66}$$

可以证明，这相当于要求

$$(1+x^2)^2+2C(1-x^2)>0 \tag{4-2-67}$$

考虑到光学双稳态系统的状态方程(4-2-30)式，上式恰好是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0 \tag{4-2-68}$$

表明在状态方程(4-2-30)式中，若曲线的斜率是正的，则解是稳定的；若曲线斜率是负的，则解是不稳定的。由图 4-2-2 上的曲线看出，x_1 和 x_3 稳定的，x_2 是不稳定的。

1981 年卫耶(K. G. Weyer)等人用 Na 原子射束作了一个纯吸收型的光学双稳态实验[5]，实验中采用原子射束，是为了排除非线性色散，得到纯吸收，同时可使入射光的频率准确调谐到原子吸收谱线的中心频率处。实验装置如图 4-2-5 所示。为验证平均场理论结果，采用声光调制器，将入射的激光调制成高斯型的脉冲

$$y^2=y_0^2[1-e^{(\tau-\tau_0)^2/\tau^2}] \tag{4-2-69}$$

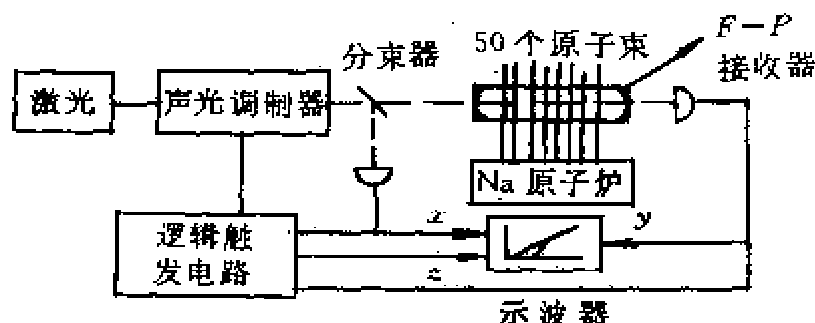


图 4-2-5 纯吸收型光学双稳态系统

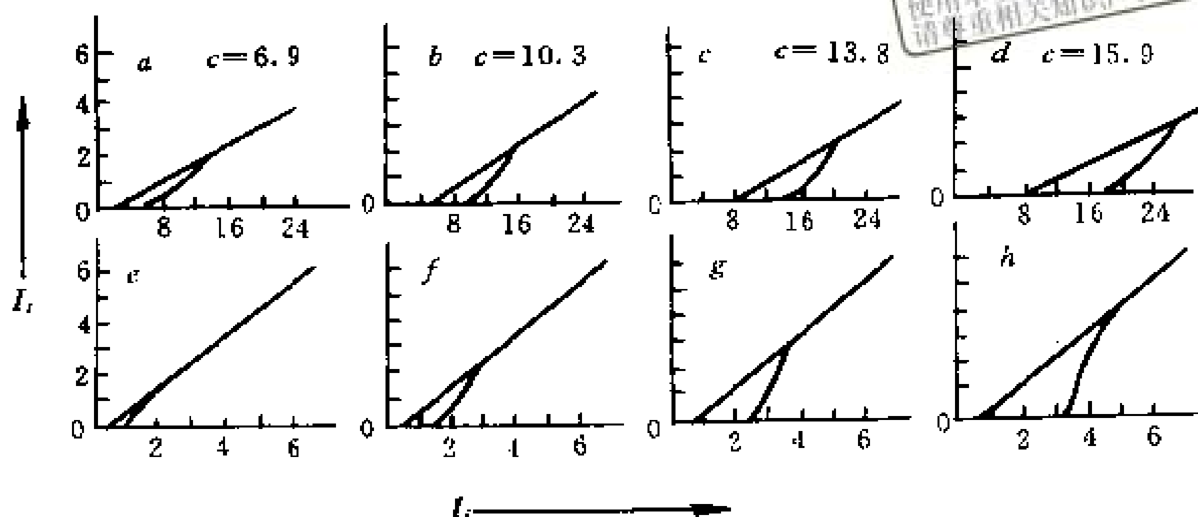


图 4-2-6 理论与实验结果比较

设初始处于稳态，取 $x_0=25$，代入状态方程(4-2-30)式确定 y_0，代回(4-2-69)式，将这样得到的 y，代入(4-2-22)—(4-2-24)式进行理论计算，计算结果如图 4-2-6 上的(e)到(h)曲线。实验是用染料激光器输出的激光，经声光调制器后被分束器分成两束光，一束作为入射光，经光电探测器接收，其输出的电信号接到示波器的 x 轴上；另一束则入射到有 50 个 Na 原子射束的法-白干涉仪，经光电探测器接收后，输出的电信号送到示波器 Y 轴上。实验测得的结果如图 4-2-6 上的(a)—(d)曲线所示。可以看出，理论与实验符合的很好。

三、色散型光学双稳态

从平均场方程(4-2-18)—(4-2-20)式出发，建立色散型光学双稳态系统的状态方程，分析产生色散型光学双稳态的条件和各种参数对光学双稳态过程的影响[5],[7]。

使用(4-2-26)和(4-2-27)式的 x 和 y 表示式，表示透射光场和入射光场，代入(4-2-18)-(4-2-20)式，得到

$$\dot{R}=(\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp})^{1/2}Rx-(\gamma_{\perp}+\mathrm{i}\delta_{A0})R \qquad (4\text{-}2\text{-}70)$$

$$\dot{D}=-\frac{1}{2}(\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp})^{1/2}(x^*R+R^*x)-\gamma_{\parallel}(D-\frac{1}{2}N) \qquad (4\text{-}2\text{-}71)$$

$$\dot{x} = -\frac{\mu\bar{g}}{\hbar(\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp})^{1/2}}R - \sigma(x-y) - i\delta_{C0}x \tag{4-2-72}$$

考虑到光谱线线型函数 $g(\Delta\omega)$的影响，介质的原子的电极化 R 和高、低能级间的粒子数差 D 是频率的函数，用 $R(\Delta\omega)$和 $D(\Delta\omega)$表示，则(4-2-70)—(4-2-72)式为

$$\dot{R}(\Delta\omega) = (\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp})^{1/2}R(\Delta\omega)x - (\gamma_{\perp} + i\Delta\omega)R(\Delta\omega) \tag{4-2-73}$$

$$\dot{D}(\Delta\omega) = -\frac{1}{2}(\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp})^{1/2}[x^* R(\Delta\omega) + R^*(\Delta\omega)x] - \gamma_{\parallel}[D(\Delta\omega) - \frac{1}{2}N) \tag{4-2-74}$$

$$\dot{x} = -\frac{\mu\bar{g}}{\hbar(\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp})^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}R(\Delta\omega)g(\Delta\omega)d(\Delta\omega) - \sigma(x-y) - i\delta_{C0}x \tag{4-2-75}$$

通过求这三个方程的稳态解($\dot{R}(\Delta\omega)=\dot{D}(\Delta\omega)=\dot{x}=0$)，得到系统的状态方程的一般形式为

$$y = x\{[1 + 2C\int\frac{g(\Delta\omega)\mathrm{d}(\Delta\omega)}{1+|x|^2+(\frac{\Delta\omega}{\gamma_{\perp}})^2}] + i[\Theta - 2C\int\frac{g(\Delta\omega)(\frac{\Delta\omega}{\gamma_{\perp}})\mathrm{d}(\Delta\omega)}{1+|x|^2+(\frac{\Delta\omega}{\gamma_{\perp}})^2}]\} \tag{4-2-76}$$

式中 C 为合作参数，Θ 为失调参数：

$$\Theta = \frac{\delta_{C0}}{\sigma} \tag{4-2-77}$$

可见对于不同的线型函数 $g(\Delta\omega)$，光学双稳态系统的状态方程将取不同的具体形式，所以谱线的加宽机制对光学双稳态具有重要作用。这里先研究光谱线线型函数 $g(\Delta\omega)$为洛仑兹函数情形：

$$g(\Delta\omega) = \frac{\bar{s}}{\pi[(\Delta\omega - \delta_{A0})^2 + \bar{s}^2]} \tag{4-2-78}$$

式中 $\bar{s}$ 由非均匀加宽的弛豫时间 T_2^* 的倒数决定。现在求系统的

状态方程，将(4-2-78)式代入(4-2-76)式，并引用下列符号：

$$\eta=\frac{\Delta\omega}{\gamma_{\perp}},\qquad \Delta=\frac{\delta_{A0}}{\gamma_{\perp}}=\frac{\omega_A-\omega_0}{\gamma_{\perp}}$$

$$\bar{s}=\frac{s}{\gamma_{\perp}},\qquad 1+|x|^2=\xi^2 \tag{4-2-79}$$

则(4-2-76)式为

$$y=x\{[1+2C\frac{\bar{s}}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}\eta}{[(\eta-\Delta)^2+s^2][\eta^2+\xi^2]}]+$$

$$+\mathrm{i}[\Theta-2C\frac{s}{\pi}\int\frac{\eta\mathrm{d}\eta}{[(\eta-\Delta)^2+s^2][\eta^2+\xi^2]}]\} \tag{4-2-80}$$

先算第一个积分

$$\frac{s}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}\eta}{[(\eta-\Delta)^2+s^2][\eta^2+\xi^2]}$$

$$=\frac{s}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}\eta}{[(\eta-\Delta)+\mathrm{i}s][(\eta-\Delta)-\mathrm{i}s](\eta+\mathrm{i}\xi)(\eta-\mathrm{i}\xi)} \tag{4-2-81}$$

该积分在上半平面上有两个奇点

$$\eta_1=\Delta+\mathrm{i}s,\qquad \eta_2=\mathrm{i}\xi \tag{4-2-82}$$

于是

$$\mathrm{R\,es}[f(\eta,\eta_1)]=\frac{1}{[(\eta-\Delta)+\mathrm{i}s](\eta^2+\xi^2)}\Big|_{\eta=\Delta+\mathrm{i}s}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}2s[\xi^2+\Delta^2-s^2+\mathrm{i}2s\Delta]}$$

$$\mathrm{R\,es}[f(\eta,\eta_2)]=\frac{1}{[(\eta-\Delta)^2+s^2](\eta+\mathrm{i}\xi)}\Big|_{\eta=\mathrm{i}\xi}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}2\xi[s^2+\Delta^2-\xi^2-\mathrm{i}2\xi\Delta]} \tag{4-2-83}$$

所以积分(4-2-81)式为

$$\frac{s}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}\eta}{[(\eta-\Delta)^2+s^2][\eta^2+\xi^2]}$$

$$=\frac{s}{\pi}2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{R\,es}[f(\eta,\eta_1)]+\mathrm{R\,es}[f(\eta,\eta_2)]\}$$

$$=\frac{s+\xi}{\xi[\Delta^2+s^2+\xi^2+2s\xi]}$$

$$=\frac{s+\sqrt{1+|x|^2}}{\sqrt{1+x^2}\{\Delta^2+[s+\sqrt{1+|x|^2}]^2\}} \tag{4-2-84}$$

同理计算(4-2-80)式的第二个积分为

$$\frac{s}{\pi}\int\frac{\eta d\eta}{[(\eta-\Delta)^2+s^2][\eta^2+\xi^2]}$$

$$=\frac{\Delta}{\Delta^2+[s+\sqrt{1+|x|^2}]^2} \tag{4-2-85}$$

将(4-2-84)和(4-2-85)式代入(4-2-80)式，得到状态方程为

$$y=x\{1+\frac{2C(s+\sqrt{1+|x|^2})}{\sqrt{1+|x|^2}\{\Delta^2+[s+\sqrt{1+|x|^2}]^2\}}$$

$$+i[\Theta-\frac{2C\Delta}{\Delta^2+[s+\sqrt{1+|x|^2}]^2}]\} \tag{4-2-86}$$

引入 $\quad X=|x|^2,\qquad Y=|y|^2 \qquad$ (4-2-87)

$$\beta_1(X)=\frac{2C(s+\sqrt{1+X})}{\sqrt{1+X}\{\Delta^2+[s+\sqrt{1+X}]^2\}} \tag{4-2-88a}$$

$$\beta_2(X)=\frac{2C\Delta}{\Delta^2+[s+\sqrt{1+X}]^2} \tag{4-2-88b}$$

则可将(4-2-86)式表示为

$$Y=\{[1+\beta_1(X)]^2+[\Theta-\beta_2(X)]^2\}X \tag{4-2-89}$$

容易看出上式中的 $\beta_1(X)$和 $\beta_2(X)$分别表示介质的电极化率的吸收和色散分量，所以(4-2-89)式是描写介质既有吸收又有色散作用的吸收色散型光学双稳态系统的。当 $\Theta=s=\Delta=0$ 时，(4-2-89)式就变为(4-2-30)式，即纯吸收型光学双稳态的状态方程。

均匀加宽情形的色散型光学双稳态

对于谱线的均匀加宽情形，设 $s=0$，这时的(4-2-89)式变为

$$Y=\{[1+\frac{2C}{\Delta^2+1+X}]^2+[\Theta-\frac{2C\Delta}{\Delta^2+1+X}]^2\}X \tag{4-2-90}$$

当 $\Delta\gg1$ 上式可过渡到纯色散型光学双稳态状态方程。

首先讨论实现纯色散的要求。对于纯色散，介质的 $\beta_1(X)=0$，这时的状态方程为

$$Y = \{1 + [\Theta - \frac{2C\Delta}{\Delta^2 + X}]^2\}X \tag{4-2-91}$$

研究(4-2-91)与(4-2-90)式相近似的条件，将这两个表示式分别展开得到：

$$Y = \{(1+\Theta)^2 + \frac{1}{\Delta^2 + 1 + X}[4C(1 - \Theta\Delta) + \frac{4C^2(1+\Delta^2)}{\Delta^2 + 1 + X}]\}X \tag{4-2-92}$$

$$Y = \{(1+\Theta)^2 - \frac{1}{\Delta^2 + X}[4C\Theta\Delta - \frac{4C^2\Delta^2}{\Delta^2 + X}]\}X \tag{4-2-93}$$

对这两个表示式进行比较，发现当

$$\Delta^2 \gg 1, \qquad \Theta \gg \frac{1}{\Delta} \tag{4-2-94}$$

时，才基本一致。此外，还要求$\beta_1(X)\to 0$，(4-2-91)式可表示为

$$Y = \{1 + [\Theta - \beta_2(X)]^2\}X \tag{4-2-95}$$

当光学双稳态系统的法-珀腔是空的腔时，上式给出 $Y=(1+\Theta)Z$，空腔的共振频率为 ω_C，当腔内有介质时，腔的共振频率应修正，因此可能存在这样的 $X=X_b$，它使 $\Theta-\beta_2(X_b)=0$，从而有 $Y=X_b$，系统如同吸收型光学双稳中出现的吸收漂白(Bleaching)那样。所以，由(4-2-91)式得到：

$$\Theta - \frac{2C\Delta}{\Delta^2 + X_b} = 0 \tag{4-2-96}$$

由此求出

$$X_b = (\frac{2C}{\Theta\Delta} - 1)\Delta^2 \tag{4-2-97}$$

因为 $X_b>0$，所以由上式得到

$$2C > \Theta\Delta \tag{4-2-98}$$

再来求 $\beta_1(X)$，由(4-2-90)式得到

$$\beta_1(X) = \frac{2C}{1 + \Delta^2 + X_b} \simeq \frac{2C}{\Delta^2 + X_b} \tag{4-2-99}$$

将(4-2-97)式代入上式，得到

$$\beta_1(X) = \frac{\Theta}{\Delta} \tag{4-2-100}$$

如果只存在色散，则要求 $\beta_1(X) \ll 1$，由上式则应有

$$\Theta \ll \Delta \tag{4-2-101}$$

可见，在满足(4-2-94)、(4-2-97)和(4-2-101)式表示的条件时，介质是纯色散的。

现在讨论均匀加宽纯色散光学双稳态的条件。光学双稳态的条件是状态方程也就是函数 $Y(X)$ 应存在大于零的单一的拐点 X_f 和在拐点处曲线 $Y(X)$ 的斜率应为负值，前者表明拐点应在 $X>0$ 的区域内，后者表明系统参数在满足这一条件时，曲线具有极大值和极小值。所以光学双稳态的条件可表示为

$$X_f > 0 \tag{4-2-102}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right|_{X_f} < 0 \tag{4-2-103}$$

对于状态方程(4-2-90)式表示的函数 $Y(X)$ 的拐点 X_f，容易求出为

$$X_f = (1+\Delta^2)\frac{2C - \Theta\Delta + 1}{C + \Theta\Delta - 1} \tag{4-2-104}$$

由上式看出，为满足(4-2-102)式的要求，则应有

$$2C > \Theta\Delta - 1, \qquad \text{当 } \Theta\Delta > 0 \tag{4-2-105}$$

$$C > 1 - \Theta\Delta, \qquad \text{当 } \Theta\Delta < 0 \tag{4-2-106}$$

(4-2-90)式在拐点 X_f 处对 X 的微商为

$$\left.\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right|_{X_f} = -\frac{1}{27C(1+\Delta^2)}\{(2C - \Theta\Delta + 1)^2[C + 4(\Theta\Delta - 1)] - 27C(\Delta + \Theta)^2\} \tag{4-2-107}$$

根据(4-2-103)式的要求，由上式应该得到

$$Q(\Theta,\Delta,C) = (2C - \Theta\Delta + 1)^2[C + 4(\Theta\Delta - 1)] - 27C(\Delta + \Theta)^2 > 0$$

就是说要在满足(4-2-105)和(4-2-106)条件下，求出函数 $Q(\Theta,\Delta,C)$的极大值。分析较繁，结果表明，对给定的合作参数 C 的范围，求出的 $Q(\Theta,\Delta,C)$的情况如下：

当 $C<4$ 时，对于满足(4-2-105)和(4-2-106)式的所有 Θ 和 Δ，求出的 $Q(\Theta,\Delta)<0$，所以，在此条件下，系统不能出现双稳态；

当$\frac{1}{4}(13+\sqrt{153})>C>4$ 时，在(4-2-105)和(4-2-106)限制的区域内，只有在 $\Delta=0$、$\Theta=0$ 时 $Q(\Theta,\Delta)>0$；

当 $C>\frac{1}{4}(13+\sqrt{153})$时，在(4-2-105)和(4-2-106)式限制的范围内，当 $\Delta=\Theta=\frac{1}{2}[4+5C-3\sqrt{C(16+C)}]^{1/2}$时，$Q(\Theta,\Delta)>0$。上述分析表明，对于合作参数 $C<4$ 的系统，无论是吸收型还是色散型的，都很难出现光学双稳态，出现光学双稳态的基本上是 $C>4$。

现在分析参数 Θ、Δ 和 C 对光学双稳态系统运转特性的影响。通过函数 $Q(\Theta,\Delta,C)$来分析，首先假设系统的 Δ 和 C 固定，研究参数 Θ 变化引起的影响。此时函数 $Q(\Theta,\Delta,C)$记作 $Q(\Theta)$。设在(4-2-105)式确定的范围 $0\leqslant\Theta<(2C+1)/\Delta$ 内研究 $Q(\Theta)$。先定 $Q(\Theta)$及 $Q(\Theta)$对 Θ 的微商在边界 $\Theta=0$，$\Theta=(2C+1)/\Delta$ 处的值，然后求当 $\Theta=\Theta_{max}$时的值。对于 $\Delta>0$ 情形，模拟计算三组 $Q(\Theta)\sim\Theta$ 关系曲线，如图 4-2-7 上的曲线(a)(b)和(c)所示。选出一组 $C=30$、$\Delta=10$，画出不同 Θ 值时的滞后回线，如图 4-2-8 所示。看出 Θ 越大，滞后面积越大，这与吉布斯等人的原始实验结果一致。

按(4-2-105)和(4-2-106)式限定 Δ 的区域：

$$
\begin{aligned}
&0\leqslant\Delta<\frac{2C+1}{\Theta}, \qquad \Delta>0 \\
&\frac{1-C}{\Theta}<\Delta\leqslant 0, \qquad \Delta<0
\end{aligned}
\tag{4-2-108}
$$

讨论在 C 和 Θ 固定时，Δ 对光学双稳态的影响。为此引入下列符号

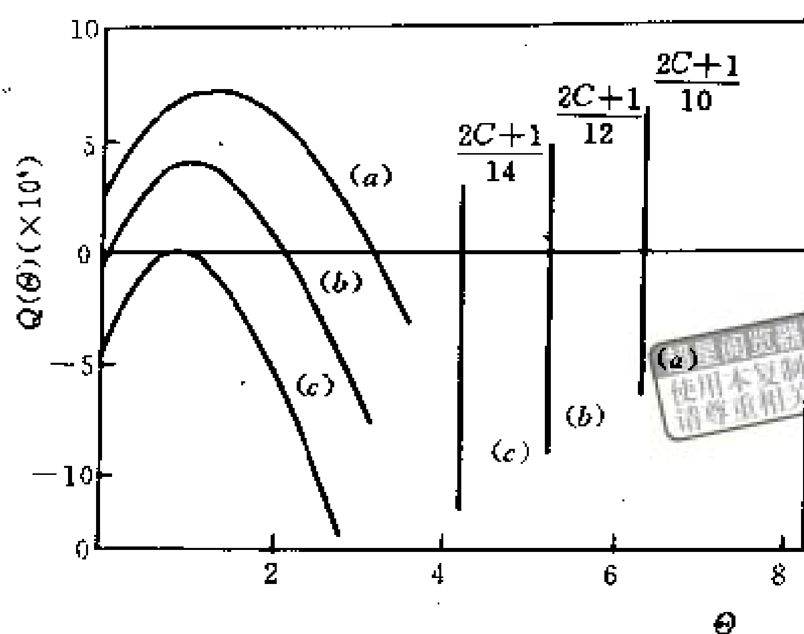


图 4-2-7　$C=30$，(a) $\Delta=10$，(b) $\Delta=12$，(c) $\Delta=15$

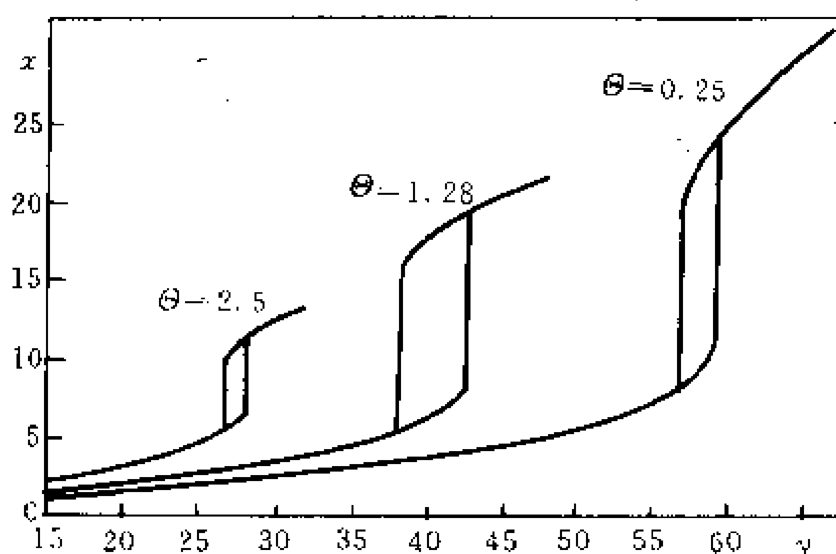


图 4-2-8　$C=30$，　$\Delta=10$

$$\mathscr{H}(\Delta) = -\left.\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right|_{X_f} \tag{4-2-109}$$

由(4-2-107)式得到

$$\mathscr{H}(\Delta) = \frac{1}{27C(1+\Delta^2)}\{(2C+1-\Theta\Delta)^2[C+4(\Theta\Delta-1)] - 27C(\Delta+\Theta)^2\} \tag{4-2-110}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Delta}\mathscr{H}(\Delta)=\frac{1}{27C(1+\Delta^2)}\{60[C(2C+5-5\Theta\Delta)-\Theta\Delta(4-2\Theta\Delta)$$
$$+2]-54C(\Delta+\Theta)\}-\frac{1}{27C(1+\Delta^2)^2}\{(2C+1$$
$$-\Theta\Delta)^2[C+4(\Theta\Delta-1)]-27C(\Delta+\Theta)^2\} \tag{4-2-111}$$

将条件(4-2-108)式代入上式，确定在边界上的情况，得到

$$\mathscr{H}(0)=\frac{1}{27C}[(2C+1)^2(C-4)-27C\Theta^2] \tag{4-2-112}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}}{\mathrm{d}\Delta}\right|_{\Delta=0}=\frac{12\Theta}{27C}(C-1)^2>0 \tag{4-2-113}$$

$$\mathscr{H}(\Delta=\frac{1-C}{\Theta})=-\frac{\Theta^2}{\Theta^2+(1-C)^2}[C^2+(\frac{1-C}{\Theta}+\Theta)^2]<0 \tag{4-2-114}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}}{\mathrm{d}\Delta}\right|_{\Delta=\frac{1-C}{\Delta}}=0 \tag{4-2-115}$$

$$\mathscr{H}(\Delta=\frac{2C+1}{\Theta})=-\frac{[1+\frac{2C+1}{\Theta}]^2}{1+(\frac{2C+1}{\Theta})^2}<0 \tag{4-2-116}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}}{\mathrm{d}\Delta}\right|_{\Delta=\frac{2C+1}{\Theta}}=\frac{4C\Theta^3(\Theta^2+2C-1)}{[\Theta^2+(2C+1)^2]^2}>0 \tag{4-2-117}$$

由上面分析看出，当 $\Delta<0$ 时，$\mathscr{H}(\Delta)$ 从负值单调上升到 Δ_{max}，然后单调下降到负值。对于给定的三组 C 和 Θ，计算出 $\mathscr{H}(\Delta)$ 与 Δ 之间的关系曲线，如图 4-2-9 所示。

对应于图 4-2-9 上的曲线(b)情形，画出了 Δ 取不同值的三个滞后环，如图 4-2-10 所示。由图看出，当 $\Delta=\Delta_{max}$ 时，滞后环面积最大。

以上讨论的是在光学双稳态系统的 C 参数固定时，Θ 和 Δ 取不同值，对光学双稳态运转性质的影响。最后研究合作参数 C 对

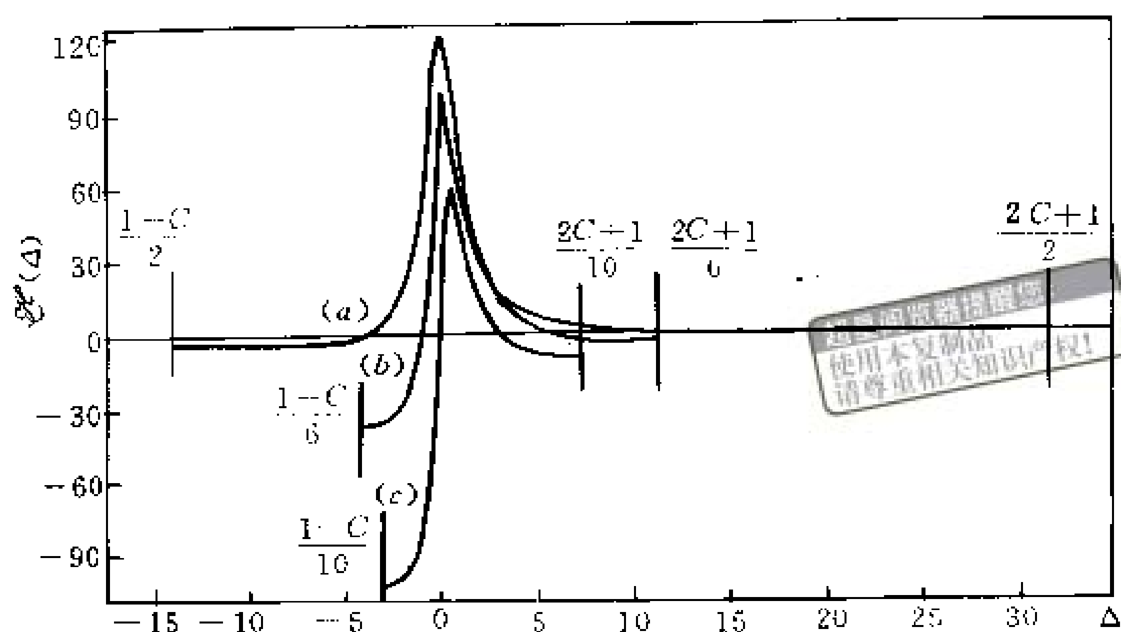


图 4-2-9 $C=30$,(a) $\Theta=2$, (b) $\Theta=6$, (c) $\Theta=10$

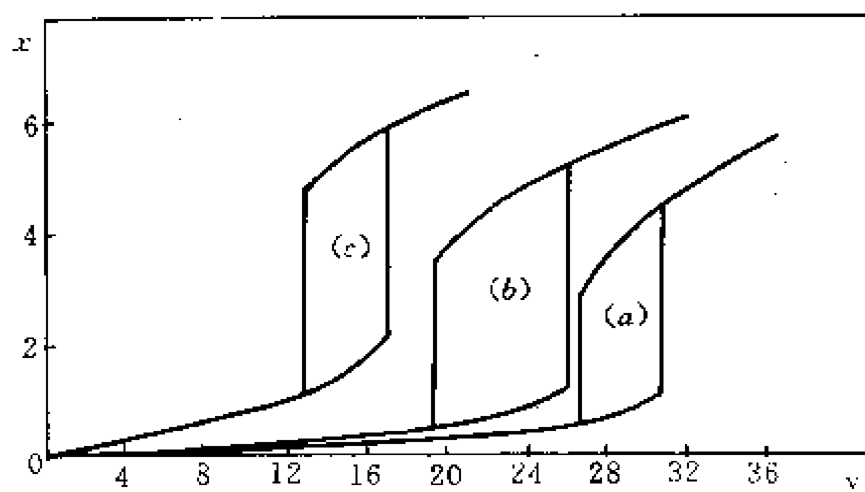


图 4-2-10 $C=30$ $\Theta=6$ (a)$\Delta=0<\Delta_{max}$, (b) $\Delta=0.55=\Delta_{max}$, (c) $\Delta=3>\Delta_{max}$

光学双稳态的影响。当系统的 Θ 和 Δ 固定时,C 的限制区域由(4-2-105)和(4-2-106)式得到为

$$C>\frac{1}{2}(\Theta\Delta-1),\qquad \Delta>0 \tag{4-2-118}$$

$$C>1-\Theta\Delta,\qquad \Delta<0 \tag{4-2-119}$$

引入
$$\mathscr{A}(C) = -\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\bigg|_{X_f} \tag{4-2-120}$$

则
$$\mathscr{A}(C) = \frac{1}{27C(1+\Delta^2)}\{(2C+1-\Theta\Delta)^2[C+4C(\Theta\Delta-1)] - 27C(\Delta+\Theta)^2\} \tag{4-2-121}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}(C)}{\mathrm{d}C} = \frac{1}{27C(1+\Delta^2)}\{4(2C-2\Theta+1)(C+4\Theta\Delta-4) + (2C+1-\Theta)^2 - 27(\Delta+\Theta)^2\} - \frac{1}{27C^2(1+\Delta^2)}\{(2C+1-\Theta\Delta)^2[C+4(\Theta\Delta-1)] - 27C(\Delta+\Theta)^2\} \tag{4-2-122}$$

在限制区域的边界上，得到

$$\mathscr{A}(C) = \frac{1}{2}(\Theta\Delta-1)) = -\frac{(\Delta+\Theta)^2}{1+\Delta^2} < 0 \tag{4-2-123}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{\mathrm{d}C} = \bigg|_{C=\frac{1}{2}(\Theta\Delta-1)} = 0 \tag{4-2-124}$$

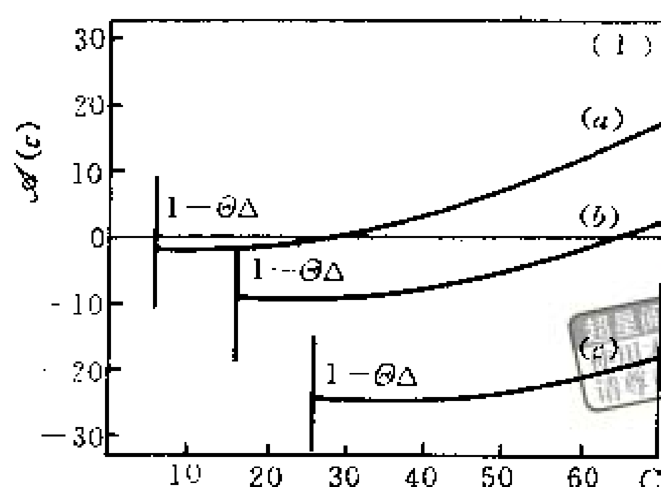
$$\mathscr{A}(C = 1-\Theta\Delta) = -\frac{(1-\Theta\Delta)^2 + (\Delta+\Theta)^2}{1+\Delta^2} < 0 \tag{4-2-125}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{\mathrm{d}C}\bigg|_{C=1-\Theta\Delta} = 0 \tag{4-2-126}$$

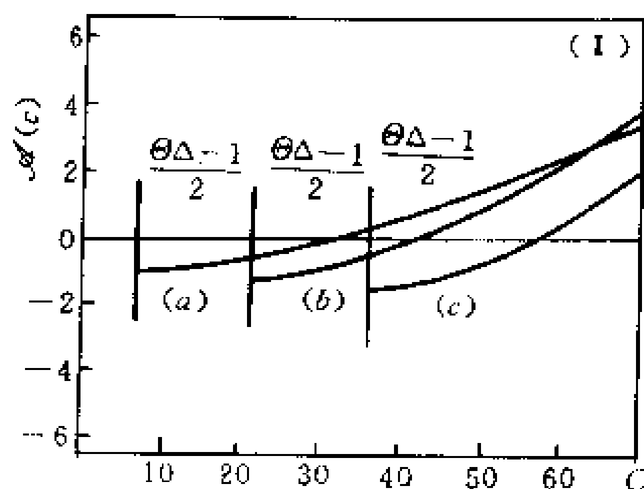
对于 $\Delta<0$ 和 $\Delta>0$ 两种情况，画出 $\mathscr{A}(C)$ 与 C 的关系曲线如图4-2-11所示，看出无论哪种情况，当 C 大于一定值时，总有 $\mathscr{A}(C)>0$，就是说总有光学双稳态发生；C 越大，$\mathscr{A}(C)$ 越大，滞后环面积大。

四、都普勒加宽介质的吸收色散光学双稳态

都普勒加宽属于非均匀加宽，光谱线线型函数 $g(\Delta\omega)$ 为高斯函数



(Ⅰ)



(Ⅱ)

图 4-2-11 (Ⅰ) $\Delta=-5$ (Ⅱ) $\Delta=15$ (a) $\Theta=1$ (b) $\Theta=3$ (c) $\Theta=5$

$$g(\Delta\omega) = \frac{4(\pi\ln 2)^{1/2}}{\Delta\omega_D} e^{-(\omega-\omega_D)^2 4\ln 2/(\Delta\omega_D)^2} \tag{4-2-127}$$

为了下面计算方便，在上式中取 $g_0 = 4(\pi\ln 2)^{1/2}/\Delta\omega_D \simeq 5.9/\Delta\omega_D$，$\Delta\omega_D$ 为都普勒加宽的频宽，这样(4-2-127)式表示为

$$g(\Delta\omega) = g_0 e^{-2.77(\Delta\omega-\delta_{AO})^2/(\Delta\omega_D)^2} \tag{4-2-128}$$

将上式代入(4-2-76)式，引用符号

$$g_D = \gamma_\perp g_0, \qquad \Delta S_D = \frac{\Delta\omega_D}{\gamma_\perp}, \qquad \Delta_D = \frac{\omega_A - \omega_0}{\gamma_\perp} \tag{4-2-129}$$

对于积分进行类似于前面的计算，则得到复数形式的状态方程

$$y = x\{[1 + 2Cg_D\mathscr{D}_1] - \mathrm{i}[\Theta - 2Cg_D\mathscr{D}_2]\} \quad (4\text{-}2\text{-}130)$$

式中

$$\mathscr{D}_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1+|x|^2}}\cos[5.54\Delta_D \frac{\sqrt{1+|x|^2}}{\Delta S_D}]$$

$$\times \exp\{-2.77[\Delta_D^2 - (1+|x|^2)]/(\Delta S_D)^2\} \quad (4\text{-}2\text{-}131)$$

$$\mathscr{D}_2 = -\pi\sin[5.54\Delta_D \frac{\sqrt{1+|x|^2}}{\Delta S_D}]$$

$$\times \exp\{-2.77[\Delta_D^2 - (1+|x|^2)]/(\Delta S_D)^2\} \quad (4\text{-}2\text{-}132)$$

引入 $Y=|y|^2$， $X=|x|^2$ 以及 $\beta_{D1}(X)$ 和 $\beta_{D2}(X)$：

$$\beta_{D1}(X) = \frac{37C}{\Delta S_D\sqrt{1+X}}\cos[5.54\Delta_D \frac{\sqrt{1+X}}{(\Delta S_D)^2}]$$

$$\times \exp\{-2.77[\Delta_D^2 - (1+x)]/(\Delta S_D)^2\} \quad (4\text{-}2\text{-}133)$$

$$\beta_{D2}(X) = -\frac{37C}{\Delta S_D}\sin[5.54\Delta_D \frac{\sqrt{1+X}}{(\Delta S_D)^2}]$$

$$\times \exp\{-2.77[\Delta_D^2 - (1+x)]/(\Delta S_D)^2\} \quad (4\text{-}2\text{-}134)$$

则(4-2-130)式变为

$$Y = \{[1+\beta_{D1}(X)]^2 + [\Theta - \beta_{D2}(X)]^2\}X \quad (4\text{-}2\text{-}135)$$

上式中 $\beta_{D1}(X)$ 和 $\beta_{D2}(X)$ 分别为介质电极化率的吸收和色散分量。将 $\beta_{D1}(X)$ 和 $\beta_{D2}(X)$ 表示式中的 e 指数展开，取前两项，并用 x 替代 X，则由(4-2-133)和(4-2-134)式得到

$$\beta_{D1}(x) = \frac{37C}{\Delta S_D\sqrt{1+|x|^2}}\cos[5.54\frac{\Delta_D\sqrt{1+|x|^2}}{\Delta S_D^2}]$$

$$\times [1 - 2.77\frac{\Delta_D^2 - (1+|x|^2)}{\Delta S_D^2}] \quad (4\text{-}2\text{-}136)$$

$$\beta_{D2}(x) = -\frac{37C}{\Delta S_D}\sin[5.54\frac{\Delta_D\sqrt{1+|x|^2}}{\Delta S_D^2}]$$

$$\times [1 - 2.77\frac{\Delta_D^2 - (1+|x|^2)}{\Delta S_D^2}] \quad (4\text{-}2\text{-}137)$$

用 x 和 y 表示，(4-2-135)式变为

$$y = x\{[1+\beta_{D1}(x)]^2 + [\Theta - \beta_{D2}(x)]^2\}^{1/2} \quad (4\text{-}2\text{-}138)$$

现在讨论参数 Δ_D、Θ、C 和 ΔS_D 对都普勒加宽介质的光学双稳态的影响。采用数值计算法进行分析。图 4-2-12 是在 Δ_D、Θ 和 ΔS_D 固定情况下(取 $\Delta_D=\Theta=1$，$\Delta S_D=3$)，改变 C 得到的 x-y 之间关系曲线，随 C 增大，双稳区变大，甚至在 $C<4$ 时也出现双稳态。

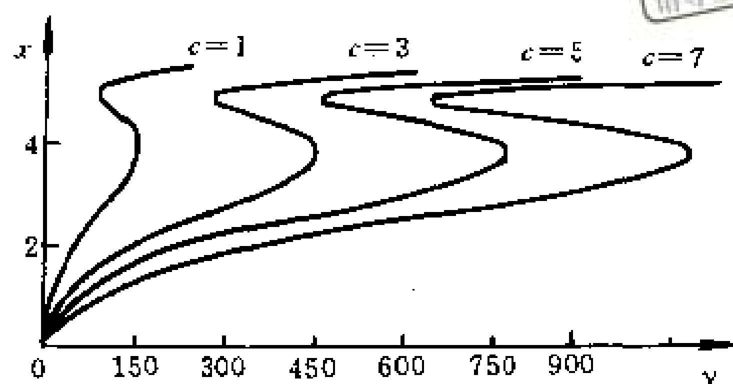


图 4-2-12　$\Delta_D=\Theta=1$，　$\Delta S_D=3$

图 4-2-13 是在 $\Delta_D=0$ 时，取 $\Theta=1$，$\Delta S_D=3$ 以 C 作参变数，得到的 x-y 曲线，由图看出 C 值取很大，既使改变 Θ 和 ΔS_D，也很难出现光学双稳态。计算结果表明在高斯线型函数的非均匀加宽介

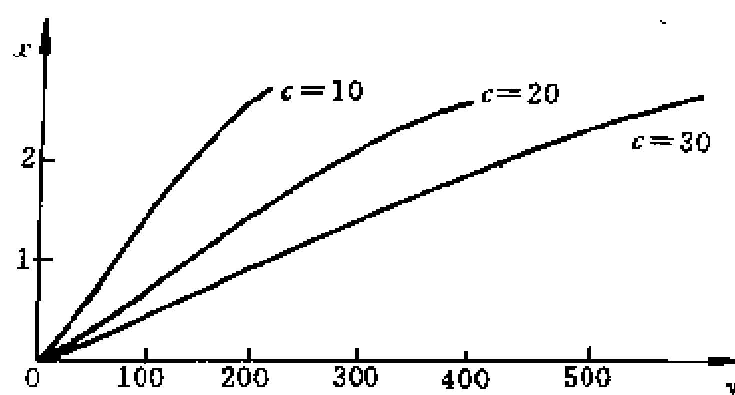


图 4-2-13　$\Delta_D=0$，　$\Theta=1$，　$\Delta S_D=3$

质中，当入射光场与原子完全共振时，很难出现光学双稳态。

图 4-2-14 表示 Δ_D 对光学双稳态的影响，由图看出，当入射光

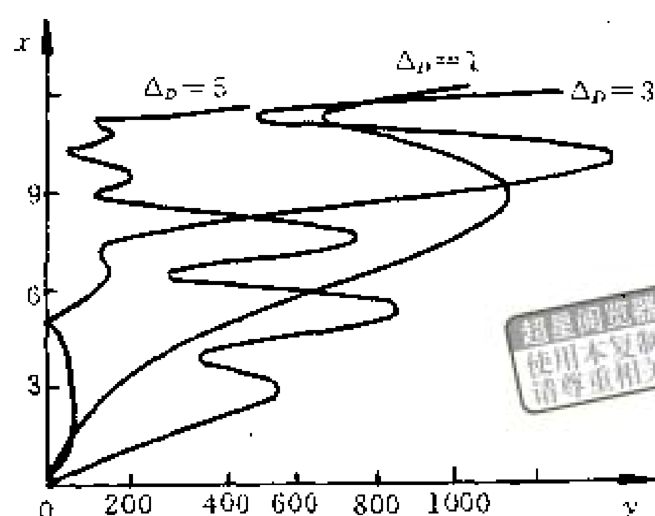


图 4-2-14　$\Theta=1$，　$\Delta S_D=3, C=5$

场频率和原子跃迁频率之间相差变大，即随 Δ_D 的加大，系统将出现多稳态。

图 4-2-15 是 Θ 对滞后环的影响，随 Θ 增大，滞后环面积加大，在 $\Theta=0$ 时仍有光学双稳性。

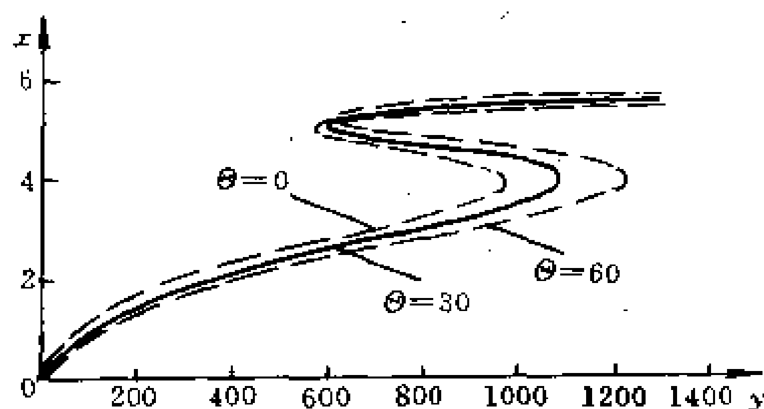


图 4-2-15　$\Theta=1$，　$\Delta S_D=3, C=5$

图 4-2-16 给出 ΔS_D 对光学双稳性的影响，随着 ΔS_D 变大，双稳区变小。

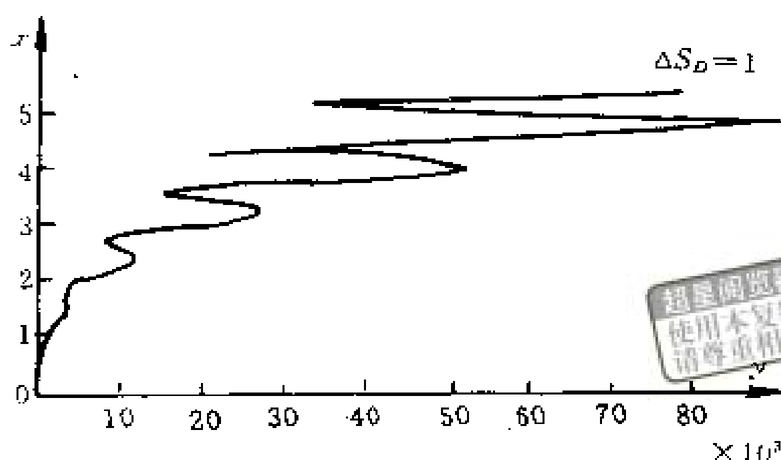


图 4-2-16　$\Delta_D=1$，$\Theta=1$，$C=5$

§4-3　光学双稳态的池田(Ikeda)方程

光学双稳态系统在一定条件下将出现不稳定性和混沌，池田最早从理论上研究这些现象，建立了池田差分-微分方程[8]，这是一个延时方程。吉布斯(H. M. Gibbs)等人根据这一方程的理论结果，在实验上首次观察到光学双稳态混沌，这也是第一个在实验上观察到的光学混沌。

现在在半经典理论范围建立光学双稳态系统的池田方程。设光学双稳态的介质由 N 个二能级原子组成，它们的运动用密度矩阵描写，光的电场服从麦克斯韦方程组。对 N 个二能级原子引入以下三个量

$$m(t)=\rho_{\alpha\beta}+\rho_{\beta\alpha} \tag{4-3-1}$$

$$f(t)=\mathrm{i}[\rho_{\alpha\beta}-\rho_{\beta\alpha}] \tag{4-3-2}$$

$$d(t)=|\rho_{\alpha\alpha}|^2-|\rho_{\beta\beta}|^2 \tag{4-3-3}$$

式中 α 表示原子的上能级，β 表示原子的下能级，$d(t)$ 显然表示二能级原子系统高、低能级上的粒子数差。将(4-3-1)—(4-3-3)式对时间微商，然后将(1-4-10)—(1-4-13)式表示的密度矩阵元素 $\dot{\rho}_{\alpha\alpha}$、

$\dot{\rho}_{\beta\beta}$、$\dot{\rho}_{\alpha\beta}$和 $\dot{\rho}_{\beta\alpha}$公式代入，则得到

$$\dot{m} = -\omega_{\alpha\beta} f(t) \tag{4-3-4}$$

$$\dot{f} = \omega_{\alpha\beta} m + \frac{2\mu}{\hbar} E(t) d \tag{4-3-5}$$

$$\dot{d} = -\frac{2\mu}{\hbar} E(t) f \tag{4-3-6}$$

式中 $\omega_{\alpha\beta}=(w_\alpha - w_\beta)/\hbar$，$w_\alpha$ 和 w_β 分别是二能级原子高、低能级的能量。光的电场强度 $E(t)$由麦克斯韦方程组导出的波动方程决定，如果忽略光场在传播过程中的损耗，波动方程为

$$\ddot{E}(t) + \omega^2 E(t) = -\frac{N\mu}{\varepsilon_0}\ddot{m} \tag{4-3-7}$$

式中 ω 为光的频率，假设单模光场随时间简谐变化。

设 $m(t) = M_1(t)\cos[\omega t + \phi(t)] - M_2(t)\sin[\omega t + \phi(t)]$ (4-3-8)

$$f(t) = M_1(t)\sin[\omega t + \phi(t)] + M_2(t)\cos[\omega t + \phi(t)] \tag{4-3-9}$$

$$E(t) = \mathscr{E}(t)\cos[\omega t + \phi(t)] \tag{4-3-10}$$

式中 $M_1(t)$、$M_2(t)$、$\mathscr{E}(t)$和 $\phi(t)$都是待定的量，并假设它们都是时间的缓变函数，将(4-3-8)—(4-3-10)式代入(4-3-4)—(4-3-7)式，取旋波近似得到

$$\dot{M}_1 = -(\omega_{\alpha\beta} - \omega)M_2 + \dot{\phi} M_2 \tag{4-3-11}$$

$$\dot{M}_2 = (\omega_{\alpha\beta} - \omega)M_1 - \dot{\phi} M_1 + \frac{\mu}{\hbar}\mathscr{E} d \tag{4-3-12}$$

$$\dot{d} = -\frac{\mu}{\hbar}\mathscr{E} M_2 \tag{4-3-13}$$

$$\dot{\mathscr{E}} = \frac{N\mu\omega}{2\varepsilon_0} M_2 \tag{4-3-14}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{N\mu\omega}{2\varepsilon_0}\frac{M_1}{\mathscr{E}} \tag{4-3-15}$$

设光场的位相随时间变化不大，可忽略(4-3-11)和(4-3-12)式中的含 $\dot{\phi}$的项；同时考虑到 M_1 和 M_2 因弛豫过程引起的衰减，对(4-3-11)和(4-3-12)式分别引入衰减项 $-\Gamma M_1$ 和 $-\Gamma M_2$，Γ 为弛豫速

率，对(4-3-13)式引入粒子数差的衰减项$-\gamma(d+1)$，γ 为 d 的衰减速率，引用 $\Delta\omega=\omega_{\alpha\beta}-\omega$，$\tau=t-\frac{z}{c}$，$k=\omega/c$，则(4-3-11)—(4-3-15)式变为

$$\frac{\partial}{\partial\tau}M_1=-M_2\Delta\omega-\Gamma M_1 \tag{4-3-16}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}M_2=M_1\Delta\omega+\frac{\mu}{\hbar}\mathscr{E}d-\Gamma M_2 \tag{4-3-17}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}d=-\frac{\mu}{\hbar}\mathscr{E}M_2-\gamma(d+1) \tag{4-3-18}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{E}=\frac{N\mu k}{2\mathscr{E}_0}M_2 \tag{4-3-19}$$

$$\mathscr{E}\frac{\partial}{\partial z}\phi=-\frac{N\mu k}{2\varepsilon_0}M_1 \tag{4-3-20}$$

假设系统的弛豫速率 Γ 非常大，可绝热消除 M_1 和 M_2，则由(4-3-16)和(4-3-17)式得到

$$M_1=-\frac{\Delta\omega}{\Gamma}M_2 \tag{4-3-21}$$

$$M_2=\frac{\Gamma\mu\mathscr{E}d}{(\Gamma^2+\Delta\omega^2)\hbar} \tag{4-3-22}$$

将(4-3-22)式代入(4-3-18)式，并设 $E=\mathscr{E}e^{i\phi}$，则得到

$$\frac{\partial d}{\partial\tau}=-\frac{\Gamma\mu^2}{(\Gamma^2+\Delta\omega^2)\hbar}|E|^2d-\gamma(d+1) \tag{4-3-23}$$

将(4-3-21)和(4-3-22)式代入(4-3-19)和(4-3-20)式，得到：

$$\frac{\partial E}{\partial z}=\frac{\Gamma\mu^2k}{2\varepsilon_0(\Gamma^2+\Delta\omega^2)\hbar}(\Gamma+i\Delta\omega)Ed \tag{4-3-24}$$

对于如图 4-3-1 所示的环形腔光学双稳态系统，边界条件为

$$E(t,0)=\sqrt{T}E_I(t)+Re^{ik\mathscr{L}}E\left(t-\frac{l}{c},L\right) \tag{4-3-25}$$

$$E_T(t)=\sqrt{T}E(t,L)e^{ikL} \tag{4-3-26}$$

式中 E_I 为入射光的电场，E_T 为透射光的电场，R 为腔镜反射率，T 为透过率，$\mathscr{L}$ 是环形腔总长度，L 为介质长度，$l=\mathscr{L}-L$。

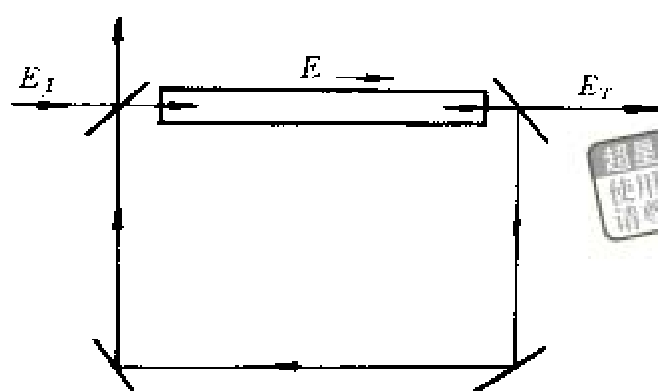


图 4-3-1　环形腔光学双稳态系统

从(4-3-23)至(4-3-26)式出发，建立池田方程。先将(4-3-23)和(4-3-24)式对坐标 z 积分，并引入

$$D(\tau,z)=\int_0^z d\left(\tau+\frac{z'}{c},z'\right)\mathrm{d}z' \tag{4-3-27}$$

则得到

$$\frac{\partial}{\partial\tau}D(\tau,z)=-\gamma[D(\tau,z)+z]-\frac{1}{2\varepsilon_0 Nk\hbar}|E(\tau,0)|^2\times\left[\exp\frac{N\mu^2 k\Gamma D(\tau,z)}{\varepsilon_0(\Gamma^2+\Delta\omega^2)\hbar}-1\right] \tag{4-3-28}$$

$$E\left(\tau+\frac{z}{c},z\right)=E(\tau,0)\exp\frac{N\mu^2 k}{2\varepsilon_0(\Gamma^2+\Delta\omega^2)}(\Gamma+\mathrm{i}\Delta\omega)D(\tau,z) \tag{4-3-29}$$

引入符号

$$\alpha=\frac{N\mu^2 k}{2\varepsilon_0\hbar},\quad \kappa=\frac{\mu}{\hbar},\quad \gamma_\perp=\Gamma,\quad \gamma_\parallel=\gamma \tag{4-3-30}$$

同时注意到为了与池田的原始文献的结果在形式上一致，这里以 $2D$ 代 D[9]，(4-3-28)与(4-3-29)式为

$$\frac{\partial}{\partial\tau}D(\tau,z)=-\gamma_\parallel\left(D+\frac{z}{2}\right)-\frac{\kappa^2}{2\alpha}|E(\tau,0)|^2\left\{\exp\frac{2\alpha\gamma_\perp D}{\gamma_\perp^2+\Delta\omega^2}-1\right\} \tag{4-3-31}$$

$$E\left(\tau+\frac{z}{c},z\right)=E(\tau,0)\exp\frac{2\alpha(\gamma_\perp+\mathrm{i}\Delta\omega)}{\gamma_\perp^2+\Delta\omega^2}D \tag{4-3-32}$$

引入以下无量纲的量

$$x = \gamma_{\parallel} t,\ \Lambda = \frac{\gamma_{\parallel} \mathscr{L}}{C},\ \Delta = \frac{\Delta\omega}{\gamma_{\perp}},\ \beta = \frac{2\gamma_{\perp} \alpha}{\gamma_{\perp}^2 + \Delta\omega^2} \tag{4-3-33}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{L} D(t - \frac{\mathscr{L}}{C}, L) \tag{4-3-34}$$

$$F(t,z) = \frac{\kappa}{2\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}(1+\Delta^2)}} E(t,z) \tag{4-3-35}$$

则(4-3-31)式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi = -[\Phi(x) + \frac{1}{2}] - 2|F(x-\Lambda,0)|^2 \frac{\mathrm{e}^{2\beta L\Phi(x)} - 1}{\beta L} \tag{4-3-36}$$

再来讨论边界条件，引入无量纲的量

$$F_T(t) = \frac{+\kappa E_T(t - \frac{l}{c})}{2\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}(1+\Delta^2)}} \tag{4-3-37}$$

$$F_I(t) = \frac{\kappa E_I(t)}{2\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}(1+\Delta^2)}} \tag{4-3-38}$$

将(4-3-32)-(4-3-37)和(4-3-38)式代入边界条件(4-3-25)式，得到

$$F(x,0) = \sqrt{T} F_I(x) + RF(x-\Lambda,0)\mathrm{e}^{\beta L\Phi(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\{[\Phi(x)+\frac{1}{2}]\beta L\Delta - \psi_0\}} \tag{4-3-39}$$

上式中 ψ_0 为

$$\psi_0 = -k\{[1 - \frac{N\mu^2\Delta\omega}{\gamma_{\perp}^2 + \Delta\omega^2}]L + l\} + 2\pi q \tag{4-3-40}$$

$$q = 1,2,3,\cdots$$

同样讨论透射光满足的边界条件。

在第五章，将使用(4-3-36)和(4-3-39)式讨论光学双稳态混沌。

参考文献



[1] Szöke A et al. Appl. Phys. Letters, Vol 15, 1969, 376

[2] Gibbs H M et al. Phys. Rev. Letters, Vol 36, 1976, 1135

[3] Chrostowski J and Delisle C. Opt. Comm, Vol 41, 1982, 71

[4] Baoni facio R and Lugiato L A. Phys. Rev, A. Vol 11, 1975, 1507; A. Vol 12, 1975, 587

[5] Weyer K G et al. Opt. Comm, Vol 37, 1981, 426

[6] Baonifacio R et al. Il Nuovo Cimento, Vol 53, 1979, 311

[7] 路德仁、沈柯. 长春光机学院学报, No1 1986, 7

[8] Ikeda K. Opt. Comm, Vol 30, 1979, 257

[9] Ackerhalt J R et al. Physics Reports, Vol 128, No 4 & 5. 1985, 205.

第五章　光学混沌



本章研究光学系统的非线性动力学问题，具体研究光学系统的不稳定性和混沌。首先介绍关于混沌的若干基本概念和研究方法，然后系统讨论光学双稳态系统、激光器以及非线性光学现象等的不稳定性和混沌，最后讨论光学混沌的潜在应用。

§5-1　引　　言

关于光学系统的非线性动力学问题，特别是关于光学系统的不稳定性和混沌，目前正在进行大量的理论研究和实验研究，它的意义是将导致建立一门新的光学学科——混沌光学和发展相应的高技术。

人们对自然现象的混沌的研究已有30年的历史。混沌是指在确定性的动力学系统（Deterministic dynamical systems）中的无规行为或内在的随机性；混沌不是噪声，是对初始条件极其敏感的非周期性的有序运动，这里指的有序是一种混沌序。混沌与不稳定性是两个完全不同的概念，不稳定性是指系统产生的自脉动现象。对于混沌的系统研究起源于20世纪六十年代初洛仑斯（E. N. Lorenz）对大气运动的研究，混沌（chaos）一词起源于1975年约克（J. A. York）和李天岩在研究函数的区间迭代时，发现确定性方程中出现周期解和混沌解，并以题为Period Three Implies chaos发表其结果，从此混沌一词成为专门的术语。现今，人们认为混沌是一种关于过程的科学、关于演化的科学。在非线性动力学中，对动力学系统的不稳定性和混沌的研究已相当广泛和深入。这一类确定

性的动力学系统通常由微分方程、偏微分方程、差分方程以至简单的代数迭代方程描述，并且这些方程都是定系数的。

人们在物理学中熟习的牛顿力学是确定描写系统运动的典范，只要给定初始条件就能决定系统的过去和未来；另一方面，对于复杂系统，在物理学上往往采用统计的方法进行研究和描述，以往人们总是认为这种描述反映人们知识的不完备。然而近30年来由于发现确定性系统中出现的内在随机性，表明系统在随机运动区域，无论初始条件给的多么详细，也不能决定系统的过去和未来，这时就要用统计的方法描述。由此可见，在物理学中的确定论和几率论之间，存在着由此及彼的桥梁。确定论和统计论在更高的运动层次上统一了起来，两者互为补充。这是20世纪60年代以来物理学的重大发现。所以人们认为混沌与相对论、量子力学并驾齐驱，是20世纪科学中使人们永久铭记的三件大事。

最先研究光学混沌的是哈肯(H. Haken)，他在1975年从理论上指出，描写单模激光器运转的麦克斯韦-布洛赫方程与描写大气湍流运动的洛仑斯方程在形式上一致，从而预言激光混沌的存在。但是直到20世纪80年代，才在实验上观察到激光器的混沌。最早在实验上观察到光学混沌现象的是在光学双稳态系统，1979年池田从理论上讨论了光学双稳态系统的不稳定性和混沌，并建立了池田微分-差分方程，1981年吉布斯(H. M. Gibbs)等人公布了光电混合型光学双稳态系统的光学混沌实验。自此，人们对激光器、光学双稳态系统、非线性光学现象以及其它光学现象的混沌问题，开展了大量的研究，至今已形成了光学系统的非线性动力学问题这一引人注目的研究方向。

光学混沌的研究将使人们对原子系统发光机制有新的更深入的认识，激光混沌、散射光混沌等等都具有一系列的新性质。实验表明，光学混沌是一种可控制的现象，因此，这方面的研究除对进一步改善激光器、光学双稳态器件以及其它光学元器件和系统的性能有实际意义以外，光学混沌在信息科学技术方面的应用是有

潜力的，光学混沌在光计算、神经网络模拟、通讯、编码等等方面的可能应用是显而易见的。至于那些在发展为光学混沌的途径上所经历的物理过程，将会使人们开辟出更多的应用领域，如在倍周期分岔处光学系统对弱信号的灵敏放大作用等，即属此例。随着对光学混沌研究的深入，一门旨在研究光学混沌的产生、性质、控制、测量以及应用的学科——混沌光学正在形成中。

§5-2 关于混沌的若干基本概念

在研究光学混沌之前，先来讨论关于混沌的一些基本概念和研究方法。

一个系统怎样导致混沌，其基本思想是实现这样的数学反馈回路：系统的输出能够不断地反馈到它自身作为新的输入。这种回路无论简单还是复杂，都可出现稳定的行为和混乱的行为，它们的差别仅仅在于系统的某一参数取值的不同。这个参数只要有极小的变化，就会造成回路系统的行为从人们通常熟习的有序状态平滑地转化为表面上看来似乎是杂乱无章状态，即逐步地演化为混沌。

从数学上来看，上述过程就是实函数 $f(x)$ 的不断迭代过程，将 x 的初始值称为“种子”，若用 f 表示系统的特性，将输出再反馈到 f 当中作为新的输入，这样反复地进行，研究得到的一串实数值

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ f(f(f(x)))\cdots$$

表现的特性所表征的系统的行为。

进入混沌的途径，已经知道主要有三种，即周期加倍途径、二频途径和阵发途径。这里以周期加倍途径进入混沌为例，具体说明关于混沌的一些基本概念。

一、一维非线性映象

1. 一维映象

$$x_{n+1} = f(\lambda, x_n), \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{5-2-1}$$

上式中 λ 是实参数，当 $f(\lambda, x_n)$ 为非线性函数时，这个一维映象描写一个非线性系统，由 x 的任意初始值，通过上述的迭代过程，可以作出一个确定的过程或时间序列。这方面研究最早的是抛物线函数，早在 20 世纪 40 年代在第一代计算机上就曾分析过它产生的序列，并在七十年代将其用在生态学问题的研究上。这里就从研究得最多而且较比简单的抛物线模型开始讨论，此时

$$f(\lambda, x) = \lambda x(1 - x)$$

这样，(5-2-1)式可表示为

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \tag{5-2-2}$$

$$\lambda \in [0,4]$$

$$x \in [0,1]$$

或写作

$$y = \lambda x(1 - x) \tag{5-2-2}$$

这里不考虑 $x<0$ 或 $\lambda>4$ 情况，因为这将使线段[0,1]的映象超过它自身。

2. 倍周期分岔进入混沌

对于由(5-2-2)式描写的动力学系统，在发展为混沌的过程中，系统的参数 λ 起着重要作用。下面研究当 λ 取不同范围的值时，(5-2-2)式代表的系统的运动行为。

首先分析 λ 取 0 和 1 之间的值，即 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 情形。一旦 λ 给定，在(5-2-2)式中 λ 就是常数，对于此种情形，(5-2-2)式代表的系统有一个满足 $\xi=f(\xi)$ 的平衡态或不动点，即 $\xi=0$。从数学上来说，就是(5-2-2)式将 ξ 映射为自身。从物理上来看，就是这个平衡态是稳定的，不论 x 的初值在区间[0,1]内取任何值，总有 $x\to\xi(=0)$。

当 $1<\lambda\leqslant 3$ 时，λ 取 1 和 3 之间的值，方程(5-2-2)式表明平衡态。不再是稳定的，可以使用如图 5-2-1 所示的作图法进行迭代，最后求出平衡态 ξ。

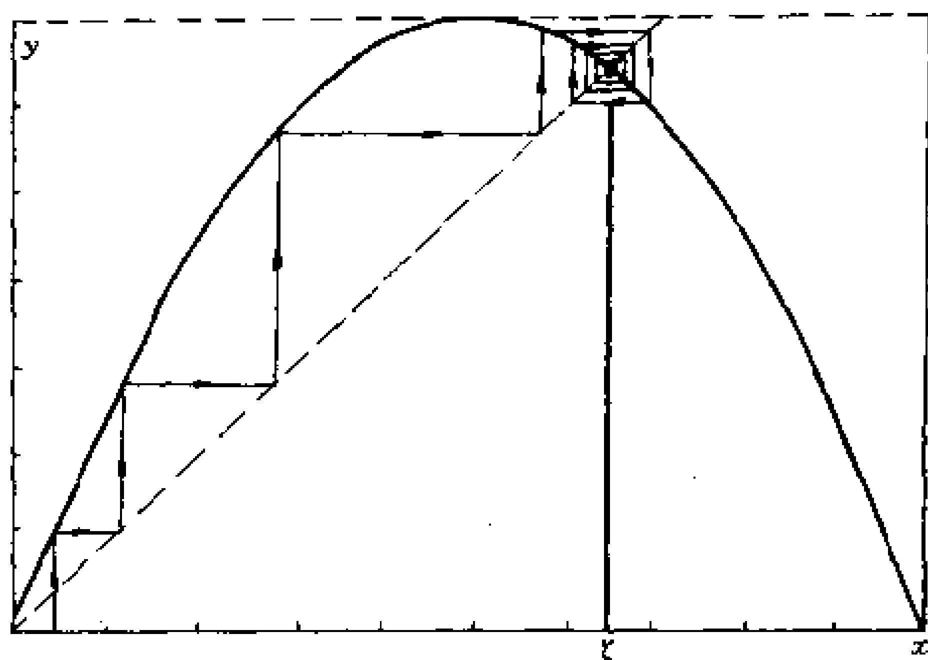


图 5-2-1 抛物线迭代

$1<\lambda\leqslant 3$

当 λ 取 3 到 $1+\sqrt{6}$（$=3.449\cdots$）之间的值，即 $3<\lambda\leqslant 1+\sqrt{6}$（$=3.449\cdots$）时，对于任意的初值 x，仍可用作图法进行迭代，如图 5-2-2 所示，在 $n\to\infty$ 时，序列无限趋近于 $\xi_1\to\xi_2\to\xi_1\to\xi_2$，即 $\xi_1\leftrightarrows\xi_2$。这是(5-2-2)式的一个周期 2 解。

可以把平衡态解释为周期 1 解，因为它满足 $x_{n+1}=X_n$，可见用(5-2-2)式表示的动力学系统，在它的参数 λ 跨越 $\lambda_1=3$ 这个值时，系统的稳定解由周期 1 变为一个周期 2 解，就是说这个系统的运动经历了一个 1 分为 2 的分岔过程。

当 λ 取 $1+\sqrt{6}$ 到某一个 λ 值之间的值时，(5-2-2)式在 $n\to\infty$ 时，序列无限趋向于：$\to\xi_1\to\xi_2\to\xi_3\to\xi_4\to$（循环）。系统由周期 2 解变为周期 $2^2=4$ 的稳定解，就是说在 λ 跨越 $\lambda_2=1+\sqrt{6}=3.449\cdots$ 时，

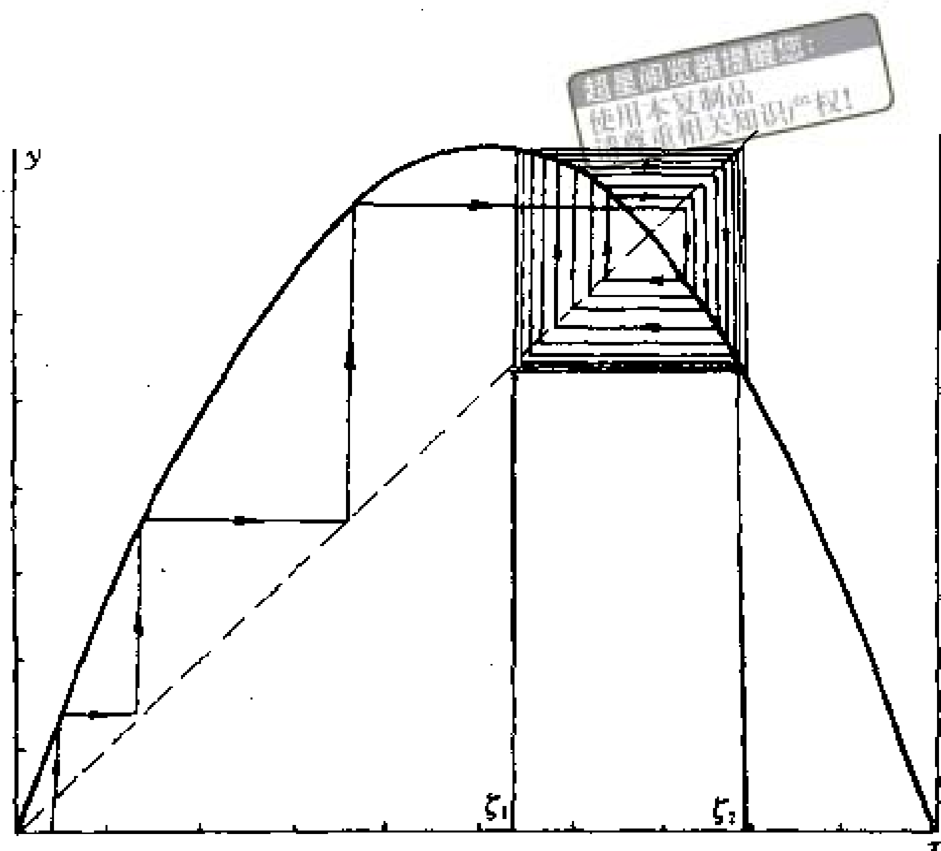


图 5-2-2 抛物线迭代

$3<\lambda\leqslant 1+\sqrt{6}$

系统的运动又经历了一个 2 分为 4 的分岔过程，$\lambda_2=3.449\cdots$是系统 2 分为 4 分岔过程的分岔点。

如此讨论下去，随着参数 λ 值继续增加，系统就会依次出现周期 8 解、周期 16 解等等稳定解和相应的分岔过程，现将分岔情况和相应的分岔点的 λ 值列举如下：

分岔情况	λ_N
1 分为 2	3
2 分为 4	3.449 489 743 $(=1+\sqrt{6})$
4 分为 8	3.544 090 359
⋮	⋮
512 分为 1024	3.569 945 137
1024 分为 2048	3.569 945 557
⋮	⋮

直到 λ 取极限值：

$$\lambda_\infty = 3.569\ 945\ 672$$

时，经过不断分岔，系统是一个周期 2^∞ 的稳定解，在数学上这是一个康托尔(Contor)集合。当 λ 值超越上述极限值 λ_∞ 时，(5-2-2)式表示的系统即进入混沌。

以上就是(5-2-2)式表示的系统随参数 λ 不断增加，经过不断的周期加倍和分岔最后进入混沌的图象。由上述过程，首先可以看出，当系统的 λ 在 0 和 $\lambda_\infty=3.569\ 945\ 672$ 范围内取值时，系统的解序列被吸引到周期解上去；而当 λ 在 $\lambda_\infty=3.569\ 945\ 672$ 和 4 之间范围内取值时，(5-2-2)式的解序列的稳态出现怪引子，这时系统进入混沌。其次，上述的分岔过程可以用 $\xi\sim\lambda$ 之间关系的相图表示，如图 5-2-3 所示；也可以用与时间序列相应的频谱图表示，随着参数 λ 的增加，应该先看到离散谱，混沌区则是连续谱，如图

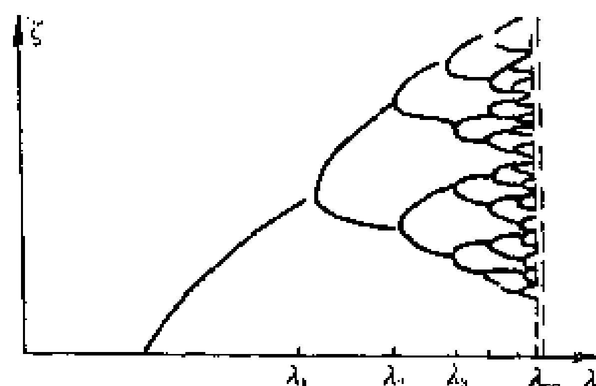


图 5-2-3　分岔图

5-2-4 所示。第三，在上述分岔过程中，系统存在一个费根包姆(Feigenbaum)数，表示在参数 λ_N 序列收敛过程中，λ 值之间的间隔比存在一个极限值

$$\delta=\lim_{N\to\infty}\frac{\lambda_N-\lambda_{N-1}}{\lambda_{N+1}-\lambda_N}$$

$$=4.669\ 201\ 660\ 910\ 299\ 097 \qquad (5\text{-}2\text{-}3)$$

它是自然界中的一个普适常数，对许多经分岔过程进入混沌的系统都有意义。第四，沙尔柯夫斯基曾证明，对于如(5-2-2)式那样的

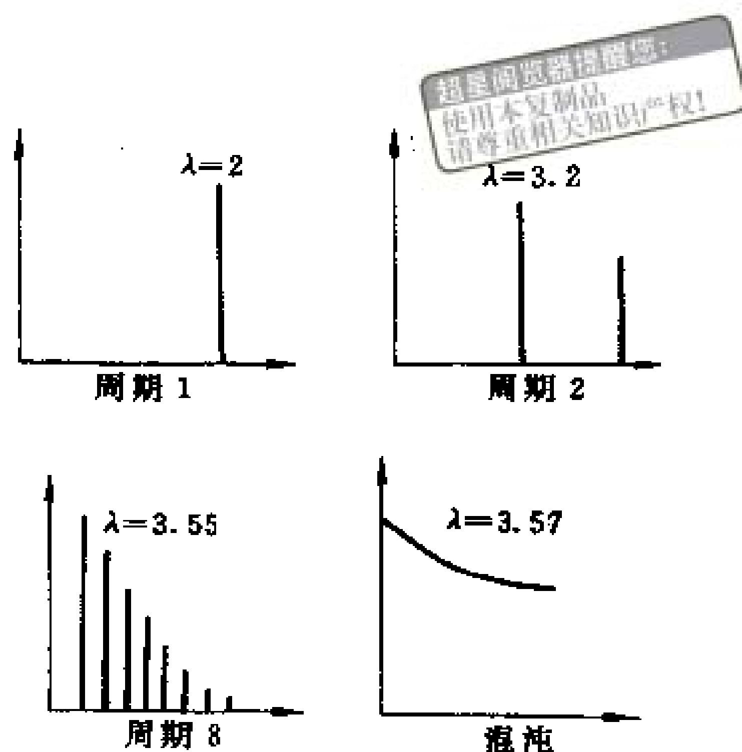


图 5-2-4　频谱图

一维迭代，随 λ 变化，系统出现的解的周期数是按着下面的序列：

$$1,2,4,\cdots;\cdots;\cdots 7\times 2^3,5\times 2^3,3\times 2^3;\cdots 7\times 2^2,5\times 2^2,3\times 2^2;\cdots 7,5,3 \tag{5-2-4}$$

按序出现的，就是说，当系统处于周期为上述的某数的解时，在此数前边的那些数表示的周期解也同时存在。值得注意的是，3 排在最后。

3. 混沌区结构

现在研究混沌区的结构，此时，(5-2-2)式中的参数 λ 在 $\lambda_\infty=3.569,945,672$ 和 4 之间取值。混沌区结构相当复杂。首先，在这个区间的最边上，即 $\lambda=4$ 时，存在着周期为任意整数的解，并且全部都是不稳定的。其次，在混沌区存在着倒分岔过程，当 λ 从 4 逐渐减少到

$$\lambda_{[1]}=3.678\ 573\ 511$$

时，混沌区由一片变成两片，随着 λ 再减少，出现如图 5-2-5 所示的两片分岔为四片，分岔值为 $\lambda_{[2]}$，当 λ 取 $\lambda_{[3]}$时，四片分岔为八片，等等。分岔值的极限为

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{(N)} = \lambda_{\infty} = 3.569\ 945\ 672$$

当 λ 取小于 λ_{∞} 值时，就进入图 5-2-3 所示的分岔过程，它同上述的倒分岔过程一起，组成了(5-2-2)式中参数 λ 在 0 和 4 之间取值时，系统出现的分岔和混沌。此外，在混沌区还有一系列的周期窗口，它们是两个周期 4 窗口，多个周期 5 窗口、周期 6 窗口等，在 $\lambda = 1 + \sqrt{8} = 3.828, \cdots$ 处有周期 3 窗口。每个窗口内还有分岔过程，如图 5-2-6 所示。如果将窗口的分岔结构放大，会得到同样的分岔结构，如此下去，不断地重复整体的图形。

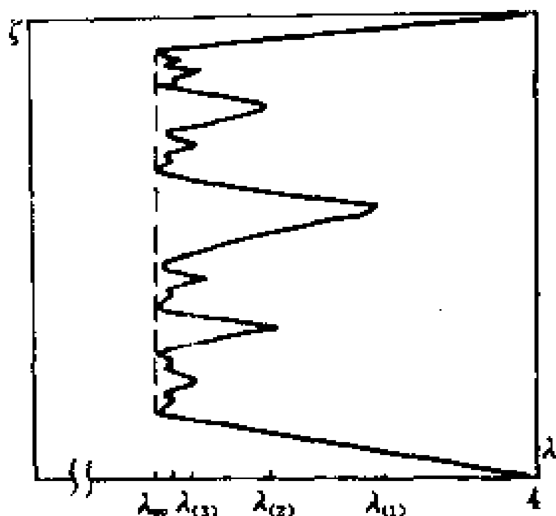


图 5-2-5　倒分岔

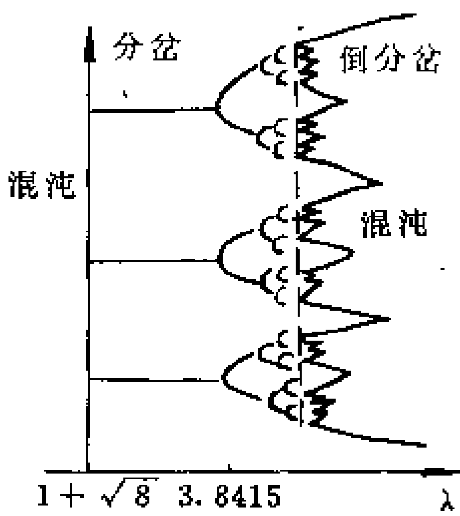


图 5-2-6

4. 举例：虫口模型

一般的二次多项式的迭代，与上述的抛物线迭代(5-2-2)式是相同的，例如研究较多的虫口模型迭代式：

$$y_{n+1} = 1 - \mu y_n^2 \tag{5-2-4}$$

上式中 μ 为参数，在虫口模型中它与食物限量以及灾害等有关。

使用微机对(5-2-4)式进行数值迭代，将 μ 限制在[0,2]区间，按 $\mu = 0.0075$ 分成小段，对于每一个固定的 μ 参数，取初值 $y_0 = 0.4$，迭代 500 次，略去前 300 次的弛豫过程，将后 200 次的准确解 y_n 标在同一条垂线上，得到图 5-2-7。它是(5-2-4)式在 $n\to\infty$ 时的动态行为。

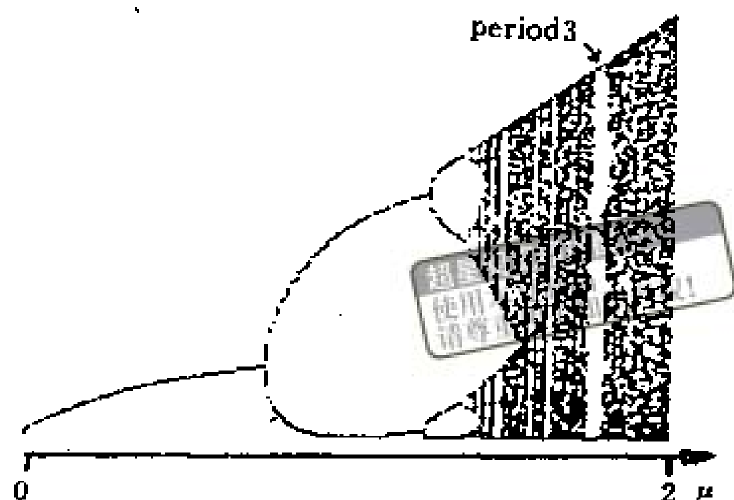


图 5-2-7 分岔图

$\mu=0-2.0$

由图看出，当 μ 取 0 到 0.75 之间的值时，y_n 趋于一个定值 ξ_0，在这样的参数 μ 情形下，虫口数代代相同。但是，当 μ 取 0.75 到 1.25 之间的值时，y_n 交替取两个值，即 $\xi_1 \leftrightarrows \xi_2$，它表示在这样的参数 μ 情形下，若某一代的虫口数为 ξ_1，则下一代为 ξ_2；再下一代又是 ξ_1，如此周期性地交替循环，它是周期 2 解。当参数 $\mu>1.25$ 以后，出现周期 4 解。之后便是更高的周期 2^n 解。到 $\mu=\mu_\infty=1.40115$时，周期为无穷，y_n 的值无规，这种无规发生在确定性方程(5-2-4)式中。这样经倍周期分岔，虫口数进入混沌。仔细观察混沌区，内部存在着许多周期窗口，例如最明显的是在 $\mu=1.75$ 处的周期 3 窗口。仍然使用微机，取其中一段进行放大，发现这些周期窗口继续倍周期分岔，在更小的尺度上重复着图 5-2-3 的分岔结构。如此继续下去，分岔结构在更小的尺度上重复，所以称此分岔结构为无穷嵌套的自相似几何结构。

二、二维非线性映象

讨论得较多的二维非线性映象是汉诺(He'non)映象：

$$x_{n+1}=1-bx_n^2+y_n,\quad y_{n+1}=ax_n \tag{5-2-5}$$

上式中 b 和 a 是常数。对于 $b=1.4$，$a=0.3$，得到的吸引子如图 5-

2-8 所示。由图可见，这个吸引子很象平滑曲线，但有宽度。若将此吸引子的一小段不断放大，可以看到具有无穷嵌套结构。

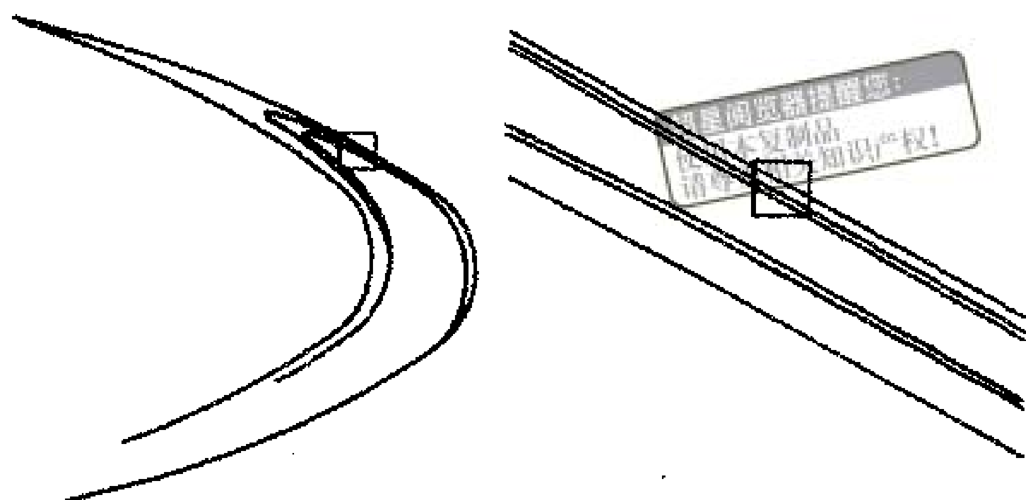


图 5-2-8 汉诺吸引子

二维映象起着从一维到高维的衔接作用，一维映象都是不可逆的，从物理上来看，它们对应着耗散系统，二维非线性映象可以从可逆到不可逆，从物理上看，可以从保守系统到耗散系统，所以提供研究它们过渡的可能性。(5-2-5)式的雅可俾(Jacobian)行列式为

$$J=\frac{\partial(x_{n+1},y_{n+1})}{\partial(x_n,y_n)}=\begin{vmatrix}-2bx_n & 1\\ a & 0\end{vmatrix}=-a \qquad (5\text{-}2\text{-}6)$$

a 取不同的值，可以反映系统的不同物理性质，$a=0$ 时，变为一维映象，即变换是不可逆的；$a\neq 0$，这个变换是可逆的，$a<1$ 对应耗散系统，$a=1$ 对应保守系统。

由上面看出，二维映象与一维映象相比，有许多新的性质，但仍保留着一维映象的一些普适特点。

三、三类具有混沌行为的非线性常微分方程

对非线性动力学系统，有些可用微分方程描述，目前已经知道的具有混沌行为的常微分方程有三类：

1. 具有三个以上变量的自治方程

对于自治的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n; \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots n \tag{5-2-7}$$

上式中 $y_1, y_2, \cdots y_n$ 是系统的状态变量，$\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$ 是系统的参数。当方程的个数 $i \geq 3$，它们描写的系统在适当条件下进入混沌。这一类方程可以举描写大气运动的洛仑斯方程为例。它是出现混沌的典型例子，研究的最多：

$$\dot{x} = -\sigma(x - y) \tag{5-2-8}$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y \tag{5-2-9}$$

$$\dot{z} = -xy - bz \tag{5-2-10}$$

上式中 x 代表气体的对流强度，y 代表上升气流与下降气流的温差，z 代表铅垂方向上温度分布的非线性度，r 代表瑞利数，σ 代表庞德数，b 代表流场环形形状。例如，当 $\sigma=10, r=28, b=8/3$，分析表明有奇怪吸引子，系统进入混沌。对于光学混沌，例如均匀加宽的远红外波段的 NH_3 分子激光器混沌，可用类似的三个自治方程讨论。

2. 非自治方程

当(5-2-7)式中右端函数含时间 t 时，方程成为非自治的。这时可通过增加新变量将非自治方程变为自治方程。在实验中增加新变量的方法是多种多样的。这里举一个简单的方法，例如通过增加一个新变量 $y_{n+1}=t$ 和自变量 τ，则系统的方程为

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n; \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n; y_{n+1}) \tag{5-2-11}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{n+1}}{\mathrm{d}\tau} = 1 \tag{5-2-12}$$

现在就成为 $n+1$ 个变量的自治方程。由此看来，对于由非自治微分方程描写的非线性动力学系统只须有两个变量并外加相应措施，就可以出现混沌。属于这方面的动力学系统是很多的，例如，在

周期力作用下的范德保振子、作强迫非简谐振动的达芬(Duffing)振子、具有调制的均匀加宽二氧化碳激光器等等。

3. 单变量的延时方程

一个延时方程,例如

$$\frac{d}{dt}y(t)+by^3(t)=y(t-\tau) \tag{5-2-13}$$

在数学上可化成无穷阶的自治方程组,所以用延时方程描写的动力学系统,能够出现分岔和混沌。描写光学双稳态系统的池田方程即属延时方程。

四、研究混沌的数值计算分析法

电子计算机的发展,为研究混沌提供了强有力的手段,下面介绍几种分析混沌的方法。

1. 运动轨道的直接观察

对非线性方程的解 $y(t)$,分别观察它们每一个的时间行为,同时把它们的运动投影到相空间中的某些截面上,我们已经知道,周期运动在截面上是封闭曲线,而在截面上,混沌则对应在一定区域随机分布的永不封闭的轨道——奇怪吸引子。这样,把它们联合起来研究,可以确定分岔点。对于研究阵发混沌,这是很直观的方法,但分辨力低。

2. 分频采样法

分频采样,就是不仅按控制频率的基本周期采样,而且是按适当分频的更长的周期采样。这样作可以提高分辨能力。

现以受到周期驱动的系统为例,说明其原理。一个受到周期驱动的系统,可以看成是线性振子和非线性振子的耦合系统。当它们之间耦合不十分强时,外周期作用对非线性运动影响不大,则可看作只有两个独立振动频率的系统,这时系统的运动表现出拍频或准周期运动现象,但是当它们之间的耦合增加时,会突然发生锁频现象,非线性振子的振动就会锁到线性振子的基频或分频上,这样

一来，系统就只剩下一个共同的振动频率，它的周期通常都是比较长的，从而实现分频采样。

用这种方法分析一些受周期驱动的系统的混沌，例如作强迫振动的布鲁塞尔振子的混沌，已经给出很好的结果。

3. 彭加勒截面法

这种方法的实质是把原来对相空间中轨道的研究，归之为研究彭加勒(Poincare)映象，这样作可以使连续运动降为低维的离散映象。这种方法对那些没有确定频率可作控制参数的系统的混沌问题，是一种较有效的研究手段。

现在用一个具体例子说明彭加勒截面法。讨论一个非线性的双振子系统，用 p_1、p_2 和 q_1、q_2 分别表示它们的广义动量和广义坐标。在 p_1、q_1；p_2、q_2 的四维相空间中，取 p_1、q_1 为固定的截面，在 p_2、q_2 平面上观察系统的运动。先看怎样得到彭加勒映象，取相空间中某一点作初始值，每当运动轨道按一定方向穿过 p_2、q_2 平面时，记录下来相应的交点 $p_n=(p_2^{(n)},q_2^{(n)})$，由此得到离散点列

$$p_0, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{n+1}, p_n, \cdots$$

这样就把系统的连续运动，表示为$(p_2、q_2)$平面中离散点的映象：

$$p_{n+1} = Tp_n$$

这就是彭加勒映象，如图 5-2-9 所示。

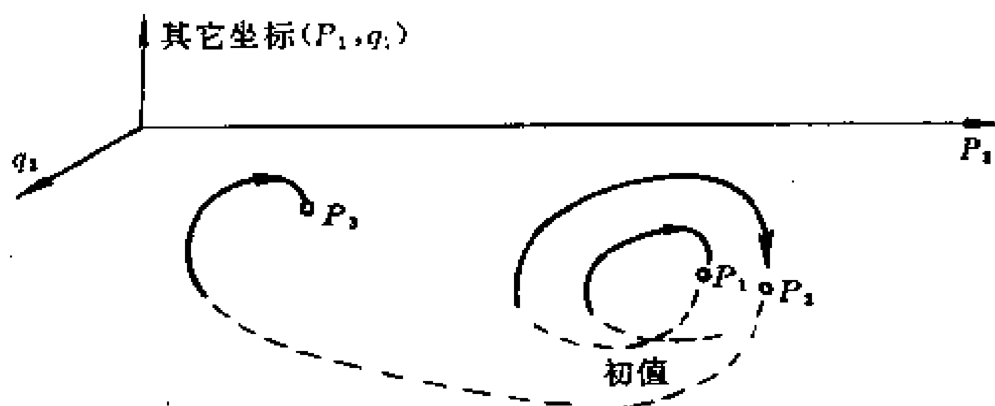


图 5-2-9　彭加勒截面法

如果轨道每次都从同一点穿过，这就是一个不动点：

$$p = Tp_0$$

相应的运动在相空间中就是一条封闭曲线，它表示周期轨道。

在相空间中，混沌运动的轨道，相应的彭加勒映象则是随机分布的点。

4. 功率谱分析法

这种分析方法对研究倍周期分岔导致混沌的问题，十分有用。这种方法的实质是，在对具体问题得到它的时间序列 y_1、$y_2 \cdots y_n$ 后，求它的功率谱，为此作快速付利叶变换，系数为

$$\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \cos\frac{i\pi k}{n} \tag{5-2-14}$$

$$\beta_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sin\frac{i\pi k}{n} \tag{5-2-15}$$

同时对 n 个采样值要加上周期条件：$y_{n+i} = y_i$。由(5-2-14)和(5-2-15)式得到

$$W'_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2 \tag{5-2-16}$$

按此办法可得到一批 W'_k，求出它们的平均值，就趋近功率谱 W_k。

对于倍周期分岔系统，在分岔过程中，每分岔一次，就有一批相应的新分频及其倍频的功率出现在功率谱中。分析功率谱的精细结构，就能区分嵌在不同混沌带中的周期轨道。

五、吸引子

现在讨论常微分方程解的极限集合的一些性质。

零维吸引子：若随着时间发展，$t \to \infty$时，被研究的系统进入定态，由于它与时间无关，用相空间描写，定态在相空间是一个特定的点而且是个不动点，如图 5-2-10(a)所示。在相空间的不动点是零维吸引子。零维吸引子所反映的运动状态如图 5-2-10(b)所示，图中横坐标表示时间，与之相应的频谱如图 5-2-10(c)所示。

一维吸引子：若被研究的系统在 $t \to \infty$时只剩下一个周期运

动，在相空间它是一个封闭曲线，如图 5-2-11(a)所示，它就是一维吸引子——极限环。相应的时间过程如图 5-2-11(b)所示，图 5-2-11(c)表示它的频谱。

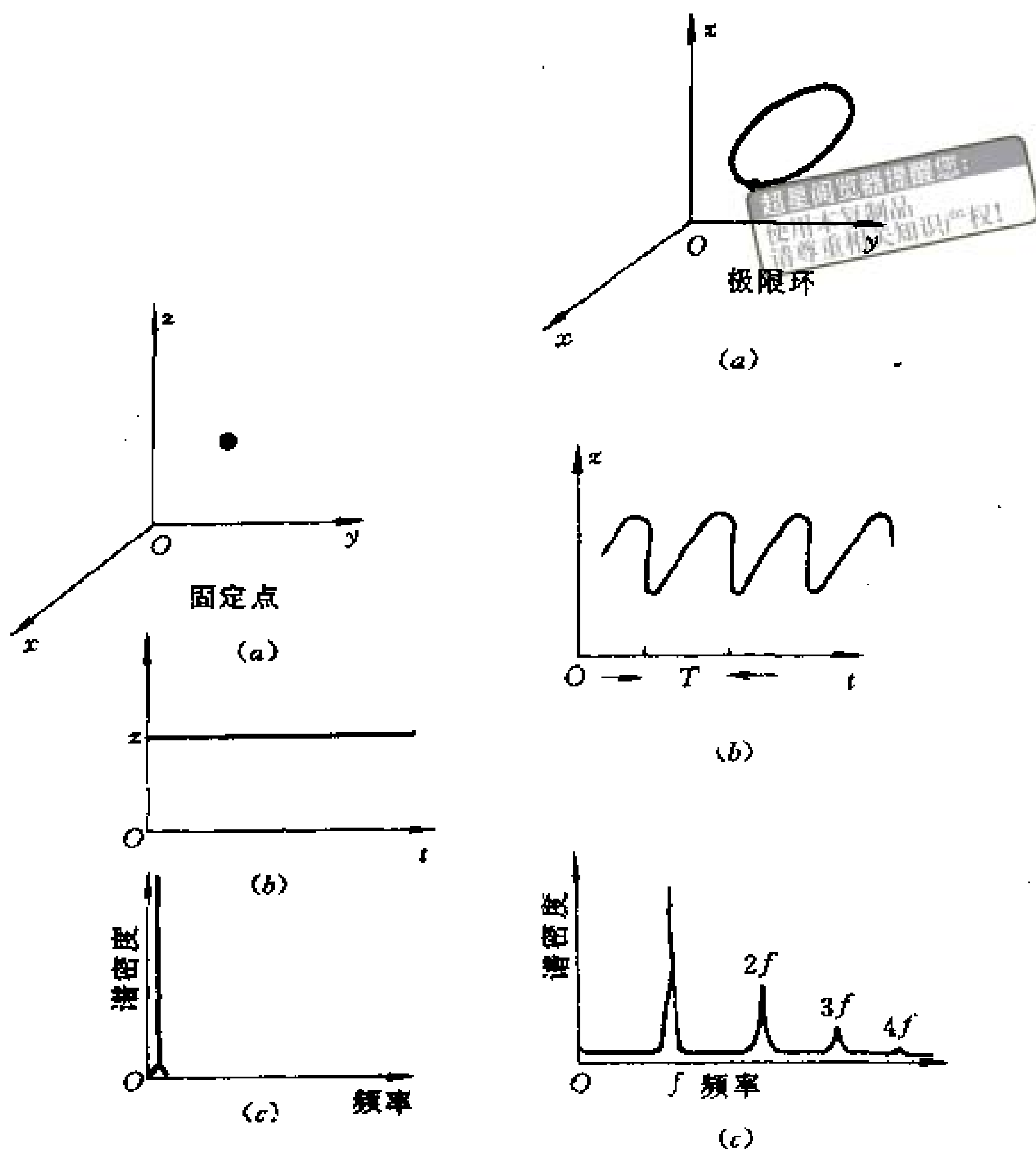


图 5-2-10　零维吸引子

图 5-2-11　一维吸引子

一般而言，极限环是由不动点经霍普夫(Hopf)分岔发展来的。在一维以上的相空间中，才能出现极限环。现在讨论霍普夫分岔。由不动点发展为极限环，是因为系统的参数发生变化，由稳定

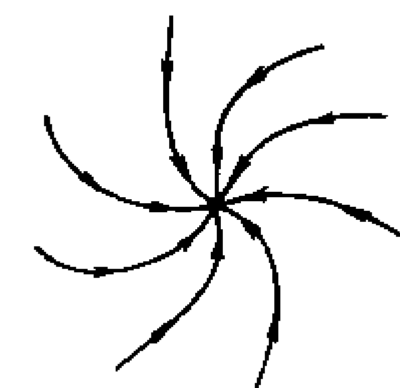
而失稳，达到的新的稳定状态是绕着原有不动点的周期运动。用下列图示可以形象地说明这一点。如果用流线代表系统的运动，则稳定的不动点可以表示为如图 5-2-12(*a*)那样的从四面汇聚的流线；而不稳定的不动点可以看作为流线的源，这样，流线应向外散开，如图 5-2-12(*b*)所示。当所研究的系统的参数稍有变化，不动点由稳定而失稳，由于参数变化较小，所以这时距不动点较远的流线仍维持原状，向中心汇聚，而在不动点近处则由图 5-2-12(*a*)变为图 5-2-12(*b*)的形式。这样，远处流线向内，近处流线向外，最后在中间形成一个表示内外两套流线的共同极限的封闭曲线，如图 5-2-12(*c*)所示，这就是极限环。

由类似的几何考虑可知，二维以上的吸引子，在相空间中则为相应维数的环面。

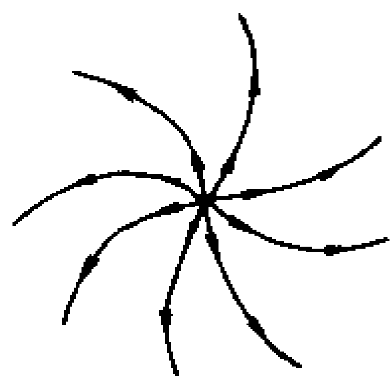
上面介绍的是非线性系统的常微分方程解的极限集合的平庸情况，即零维不动点，一维极限环、二维环面等，它们是平庸吸引子，具有 0,1,2,…整数维数。

奇怪吸引子：如果系统进入混沌，它对应于在相空间中充满有限区域的永不封闭轨道，从而构成奇怪吸引子。图 5-2-13(*a*)是(5-2-8)—(5-2-10)式表示的洛仑斯方程的奇怪吸引子，它由两片构成，每片绕着自己原来的一个不动点。由图可见，在每一片内，运动轨道从外向内绕，绕到中心附近，就随机地跳到另一片的边缘；在这一片内，运动轨道又继续向里绕，最后又突然跳回原来的那片的边缘。图 5-2-13(*b*)和图 5-2-13(*c*)是相应的时间过程和频谱分布。均匀加宽的 NH_3 分子激光器具有这样的奇怪吸引子。

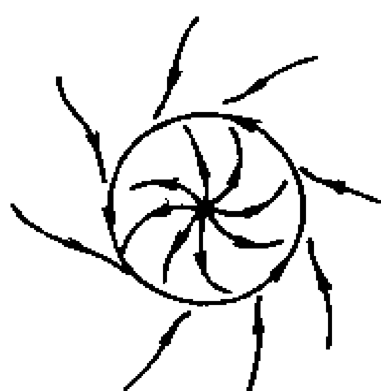
奇怪吸引子也称为随机吸引子，主要特点有：进入奇怪吸引子的部位稍有差异，运动轨道就表现出截然不同，所以说奇怪吸引子的运动对初始条件相当敏感；另外，作为相空间中的子集合，奇怪吸引子的维数是非整数的；最后，奇怪吸引子具有无穷嵌套的自相似结构。



(a)



(b)



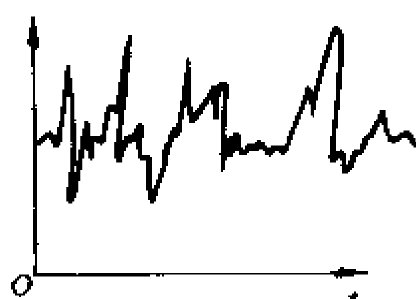
(c)

图 5-2-12 霍普夫分岔

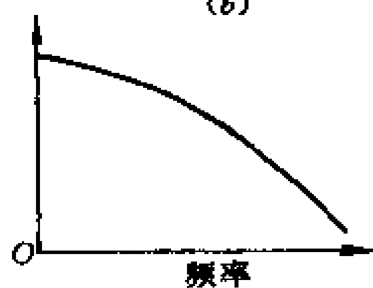


奇异吸引子

(a)



(b)



(c)

图 5-2-13 奇怪吸引子

§5-3 光学双稳态系统的不稳定性

在上一节我们已经知道，从确定论观点来看，对于所研究的动力学系统，只要给定一组完全确定的初值，则应得到确定性的动力

学过程；但是，这种过程可能对初值的任何微小摄动极其敏感，使系统最后进入不稳定状态。

已经发现光学双稳态系统在某些条件下出现自脉动现象，从物理上来看，引起光学双稳态系统出现不稳定性的起因，大致可举出以下几类：

1. 马考不稳定性

若光学双稳态系统的介质的非线性，是由多种不同的非线性机制同时产生的，则可能出现不稳定性。这是马考(S. L. Mc Call) 1978年指出的。可见，马考不稳定性主要由两个或多个符号相反、响应速度不同的非线性过程决定，不稳定性的周期将取决于这些弛豫过程的时间常数。例如，半导体材料的折射率可以由于本征的非线性和热效应等机制引起变化，导致半导体材料折射率的增加或减少，因而系统的响应时间也不一样。所以，以此构成的光学双稳态系统可以在相当大的范围内出现自脉动现象。马考不稳定性在实验上最早是在以半导体材料作为介质的光电混合型光学双稳态系统中观察到的。最早在全光学型光学双稳态系统观察到马考不稳定性的是在法-珀干涉仪内放置GaAs半导体，利用GaAs半导体的热致折射率变化和自由激子运动导致的折射率变化，这样两种不同的非线性机制，使光学双稳态系统产生短脉冲振荡。

2. 包尼法乔-鲁吉雅多不稳定性

这是吸收型光学双稳态系统出现的不稳定性。包尼法乔(Baonifacio)-鲁吉雅多(Lugiato)曾从理论上分析过吸收型的均匀加宽二能级原子系统作为介质的环形腔光学双稳态系统，在一定条件下，光学双稳态回线上支的左边部分是不稳定的，能够出现自脉动，它的基频振荡周期大约为延迟时间量级。

3. 池田不稳定性

这是色散型光学双稳态系统出现的不稳定性，是在介质的原子系统横向弛豫速率很大情形，介质的宏观电极化强度能绝热地跟随光的电场$E(z,t)$的变化，这时出现的不稳定性。可以使用池

田差分-微分方程讨论。

现以包尼法乔-鲁吉雅多不稳定性为例，从半经典理论出发，分析不稳定性条件。我们来研究如图 4-3-1 所示的环形腔光学双稳态系统，设光的电场为

$$E(z,t)=\frac{1}{2}[E_a(z,t)e^{i(kz-\omega t)}+E_a^*(z,t)e^{-i(kz-\omega t)}] \quad (5\text{-}3\text{-}1)$$

介质的宏观电极化强度为

$$P(z,t)=\frac{1}{2}N\mu i[P_a(z,t)e^{i(kz-\omega t)}+P_a^*e^{-i(kz-\omega t)}] \quad (5\text{-}3\text{-}2)$$

将(5-3-1)式代入第一章的波动方程(1-5-25)式，并取缓变近似和(1-5-29)式，可直接得到光的电场方程为

$$\frac{\partial E_a}{\partial t}+C\frac{\partial E_a}{\partial z}=-\frac{N\mu\omega}{2\varepsilon_0}P_a \quad (5\text{-}3\text{-}3)$$

假设介质由 N 个二能级原子组成，则宏观电极化强度为

$$\begin{aligned}P&=N\langle\psi(q,t)|\mathscr{B}|\psi(q,t)\rangle\\&=N\mu[\alpha^*(t)\beta(t)+\beta^*(t)\alpha(t)]\end{aligned} \quad (5\text{-}3\text{-}4)$$

与(5-3-2)式比较，得到用波函数表示的 P_a 为

$$P_a=-2i\alpha^*(t)\beta(t)e^{-i(kz-\omega t)} \quad (5\text{-}3\text{-}5)$$

由此得到：

$$\frac{\partial P_a}{\partial t}=-2i[\alpha^*(t)\beta(t)i\omega e^{-i(kz-\omega t)}+\beta(t)e^{-i(kz-\omega t)}\frac{d}{dt}\alpha^*(t)+\alpha^*(t)e^{-i(kz-\omega t)}\frac{d}{dt}\beta(t)] \quad (5\text{-}3\text{-}6)$$

将二能级原子波函数方程(1-3-9)和(1-3-13)式代入上式，忽略衰减项，并引入

$$D_a=\frac{1}{2}(\beta^*\beta-\alpha^*\alpha) \quad (5\text{-}3\text{-}7)$$

则直接得到

$$\frac{\partial P_a}{\partial t}=-iP_a\delta+\frac{\mu}{\hbar}E_aD_a \quad (5\text{-}3\text{-}8)$$

上式中

$$\delta = \omega_{\alpha\beta} - \omega, \qquad \omega_{\alpha\beta} = \frac{E_\alpha - E_\beta}{\hbar} \tag{5-3-9}$$

同理求出

$$\frac{\partial P_a^*}{\partial t} = \mathrm{i}P_a^*\delta + \frac{\mu}{\hbar}E_a^* D_a \tag{5-3-10}$$

又由(1-3-14)和(1-3-15)式，忽略衰减项，得到 D_a 的方程为

$$\frac{\partial D_a}{\partial t} = -\frac{\mu}{2\hbar}(P_a E_a^* + P_a^* E_a) \tag{5-3-11}$$

现将所得到的(5-3-3)、(5-3-8)和(5-3-11)式整理如下：在(5-3-3)式中引入衰减项$-\gamma_C E_a$ 在(5-3-8)式中引入衰减项$-\gamma_\perp P_a$，设 $\delta=0$，在(5-3-11)式中引入衰减项$-\gamma_\parallel(D_a-\frac{N}{2})$，并去掉 D_a、P_a 和 E_a 的右下标，最后得到

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c\frac{\partial E}{\partial z} = -\eta P - \gamma_c E \tag{5-3-12}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma_\perp P + \frac{\mu}{\hbar}ED \tag{5-3-13}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma_\parallel(D - \frac{N}{2}) - \frac{\mu}{\hbar}EP \tag{5-3-14}$$

上式中 η 为

$$\eta = \frac{N\mu\omega}{2\varepsilon_0} \tag{5-3-15}$$

光场的边界条件为

$$E(0,t) = \sqrt{T}E_I + RE(\mathscr{L}, t - t_R + \frac{L}{C}) \tag{5-3-16}$$

$$E_T T(t) = \sqrt{T}E(\mathscr{L}, t) \tag{5-3-17}$$

$$E_R(t) = \sqrt{R}\,\sqrt{T}E(\mathscr{L}, t - t_R + \frac{L}{C}) \tag{5-3-18}$$

先求(5-3-12)～(5-3-14)式的稳态解，令$\frac{\partial}{\partial t}=0$，引入

$$\mathscr{E}(z,t) = \frac{\mu}{\hbar}\frac{E(z,t)}{\sqrt{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}}} \tag{5-3-19}$$

得到光的电场、宏观电极化及粒子数差的稳态值 $\mathscr{E}_S$、P_S 和 D_S 为

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_S(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathscr{E}_S(z)}{\mathscr{E}_S^2(z)+1} \tag{5-3-20}$$

$$P_S(z) = \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}}}\mathscr{E}_S(z)D_S(z) \tag{5-3-21}$$

$$D_S(z) = \frac{N}{2[\mathscr{E}_S^2(z)+1]} \tag{5-3-22}$$

现在求不稳定性条件。设稳定值 $\mathscr{E}_S(z)$、$P_S(z)$和 $D_S(z)$的微小扰动分别为 $\delta\mathscr{E}(z,t)$、$\delta P(z,t)$和 $\delta D(z,t)$:

$$\delta\mathscr{E}(z,t) = \mathscr{E}(z,t) - \mathscr{E}_S(z) \tag{5-3-23}$$

$$\delta P(z,t) = P(z,t) - P_S(z) \tag{5-3-24}$$

$$\delta D(z,t) = D(z,t) - D_S(z) \tag{5-3-25}$$

研究它们的增长条件，为此对(5-3-12)—(5-3-14)式求变分，忽略(5-3-12)式中的 $\gamma_c E$ 项，将 $\delta\mathscr{E}$、δP 和 δD 用(5-3-23)—(5-3-25)式代入，对后两个方程进行线性化，即忽略诸如 $\delta D\delta\mathscr{E}$ 等小的非线性项，同时用(5-3-19)式的 $\mathscr{E}(z,t)$表示 $E(z,t)$，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathscr{E} + c\frac{\partial}{\partial z}\delta\mathscr{E} = -\frac{\mu}{\hbar}\frac{\eta}{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}}\delta P \tag{5-3-26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta P = -\gamma_{\parallel}\delta P + \sqrt{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}}[\mathscr{E}_S(z)\delta D + D_S(z)\delta\mathscr{E}] \tag{5-3-27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta D = -\gamma_{\parallel}\delta D - \sqrt{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}}[\mathscr{E}_S(z)\delta P + P_S(z)\delta\mathscr{E}] \tag{5-3-28}$$

光的电场边界条件，由(5-3-16)式为

$$\delta\mathscr{E}(0,t) = R\delta\mathscr{E}(L,t - t_R + \frac{L}{C}) \tag{5-3-29}$$

按照一般的讨论不稳定性条件的方法，设 $\delta\mathscr{E}$、δP 和 δD 有如下形式的解

$$\delta\mathscr{E}(z,t) = \varepsilon(a,z)\mathrm{e}^{at} \tag{5-3-30}$$

$$\delta P(z,t) = p(a,z)\mathrm{e}^{at} \tag{5-3-31}$$

$$\delta D(z,t) = d(a,z)\mathrm{e}^{at} \tag{5-3-32}$$

式中 a 是待定系数，一般而言，a 是复数：

$$a = A + \mathrm{i}B \tag{5-3-33}$$

只要求出 a，就可以判断系统的稳定性。为此，将(5-3-30)—(5-3-32)式代入方程(5-3-26)—(5-3-28)式，从三个方程中消去 $P(a,z)$、$d(a,z)$，得到 $\delta\mathscr{E}(z,t)$ 满足的方程，对该方程再使用边界条件(5-3-29)式，最后得到含有待定系数 a 的方程为：

$$R\exp\{-\int_0^L \mathrm{d}z \frac{b\gamma_\perp}{(a+\gamma_\perp)[\mathscr{E}_S^2(z)+1]}[1 - \frac{(a+2\gamma_\perp)\mathscr{E}_S^2(z)}{(a+\gamma_\perp)[1+a/\gamma_\parallel+\mathscr{E}_S^2(z)/(1+a\gamma_\perp^{-1})]}] - at_R\} = 1 \tag{5-3-34}$$

式中 a 为

$$b = \frac{\eta\mu N}{2\hbar c\gamma_\perp} \tag{5-3-35}$$

现在研究一种具体情形，设系统同时具有快速横向弛豫和快速纵向弛豫，即 $\gamma_\perp\to\infty$，$\gamma_\parallel\to\infty$，则(5-3-34)式变为

$$R\exp\{-\int_0^L \mathrm{d}z[\frac{b}{1+\mathscr{E}_S^2(z)}][\frac{1-\mathscr{E}_S^2(z)}{1+\mathscr{E}_S^2(z)}] - at_R\} = 1 \tag{5-3-36}$$

使用稳态解(5-3-20)式代入上式，积分后得到

$$\ln\{(1-T)b\frac{\mathscr{E}_S(L)}{\mathscr{E}_S(0)}\frac{\mathscr{E}_S(0)+1}{\mathscr{E}_S(L)+1}\} - at_R = \mathrm{i}2n\pi \tag{5-3-37}$$

由(5-3-32)式，当 a 的实部为正时，对应于光场不稳定，所以不稳定性条件为

$$(1-T)\mathscr{E}_S(L)[\mathscr{E}_S^2(0)+1] \geq \mathscr{E}_S(0)[\mathscr{E}_S^2(L)+1] \tag{5-3-38}$$

上面用一个具体例子说明讨论光学双稳态系统不稳定性条件的方

法，当然这不是唯一的方法。



§5-4 光学双稳态混沌

在实验上最先观察到光学混沌现象的是在光学双稳态系统。对于光学双稳态系统中出现的混沌，可以用池田差分-微分方程讨论。第四章第三节讨论的池田方程，实际上是一个延时方程，如果介质的吸收系数未饱和，而且远离共振，池田方程中的 $\beta L\Phi$ 可近似认为 $\beta L(-1/2)$，若令

$$\Phi(x)+\frac{1}{2}=\frac{\theta(x)}{\beta L\Delta} \tag{5-4-1}$$

$$F(x,0)=\frac{e(x)}{\sqrt{2(1-\mathrm{e}^{-\beta L})\Delta}} \tag{5-4-2}$$

则池田方程(4-3-36)式变为

$$\frac{1}{\gamma_{\parallel}}\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)=-\theta(t)+|e(t-t_R)|^2 \tag{5-4-3}$$

令

$$A=\sqrt{2T(1-\mathrm{e}^{-\beta L})\Delta}F_I \tag{5-4-4}$$

$$B=R\mathrm{e}^{-\beta L/2} \tag{5-4-5}$$

同时注意到

$$t_R=\mathscr{L}/C \tag{5-4-6}$$

则(4-3-39)式变为

$$e(t)=A+Be(t-t_R)\exp\{\mathrm{i}[\theta(t)-\psi_0]\} \tag{5-4-7}$$

当 $t_R\gg 1/\gamma_{\parallel}$ 时，可对 $\theta(t)$ 取绝热近似，由(5-4-3)式得到

$$\theta(t)\simeq|e(t-t_R)|^2 \tag{5-4-8}$$

这样，(5-4-7)式可表示为

$$e(t)=A+Be(t-t_R)\exp\{\mathrm{i}|e(t-t_R)|^2-\psi_0\} \tag{5-4-9}$$

将它化为一维迭代映象形式

$$e(t)=A+B\exp\{\mathrm{i}|e(t-t_R)|^2-\psi_0\}\{A+Be(t-2t_R)$$

$$\times \exp[\mathrm{i}|e(t-2t_R)|^2-\phi_0]\} \quad (5\text{-}4\text{-}10)$$

若 $B \ll 1$，略去带 B^2 的项，得到

$$|e(t)|^2 \simeq A^2 + 2A^2B\cos[|e(t-t_R)|^2-\phi_0] \quad (5\text{-}4\text{-}11)$$

将上式和(5-4-8)式代入(5-4-3)式，得到

$$\gamma_{\parallel}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = -\theta(t) + A^2\{1+2B\cos[|e(t-t_R)|^2-\phi_0]\}$$

$$(5\text{-}4\text{-}12)$$

现在使用上述方程分析纯光学型光学双稳态混沌。首先研究稳态特性，在稳态情况，$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)=0$，$e(t-t_R)=e(t)$，由(5-4-9)式得到

$$A^2 = e_S^2[1+B^2-2B\cos(|e_S|^2-\phi_0)] \quad (5\text{-}4\text{-}13)$$

上式中 e_S 表示稳态时的光场。(5-4-13)式表明，系统的输出光场 e_S 是输入光场 A 的多值函数，将会得到多稳态。使用微机，模拟计算(5-4-13)式，设 $B=0.4$，$\phi_0=0$，$|e_S|$ 与 A 的多值关系，其多稳态曲线如图 5-4-1 所示。

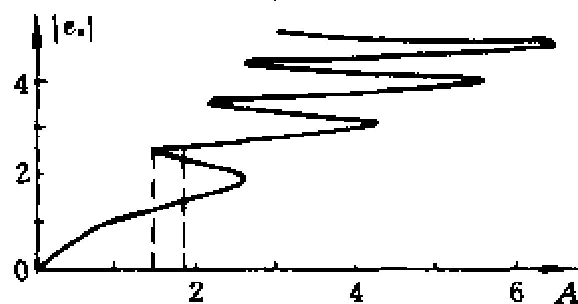


图 5-4-1　多稳态 $B=0.4$，$\phi_0=0$

讨论系统在快速弛豫情况下的动态特性，在(5-4-11)式中，如令

$$I_n = |e(t)|^2$$

$$I_{n-1} = |e(t-t_R)|^2 \quad (5\text{-}4\text{-}14)$$

得到

$$I_n = A^2[1+2B\cos(I_{n-1}-\phi_0)] \quad (5\text{-}4\text{-}15)$$

上式表明，系统的动力学过程对参数 A 和 ϕ_0 非常敏感，模拟计算

I_n-A_n 的分岔图和混沌过程，在 $\phi_0=0$ 情形，如图 5-4-2(a)所示。图上同时画出了在相应条件下的定态特性曲线。图 5-4-2(b)和图 5-4-2(c)分别是 $\phi_0=0.5\pi$ 和 $\phi_0=1.5\pi$ 情形。由图看出，系统经倍周期分岔道路进入混沌，同本章第二节讨论的抛物线模型或虫口模型相比较，这里由于存在定态多稳性和余弦函数的双峰的影响，在混沌区结构上出现新的特点，例如存在周期 1 窗口和混沌淀积等现象；每当混沌运动轨道与定态不稳定支相交时，还会出现吸引子

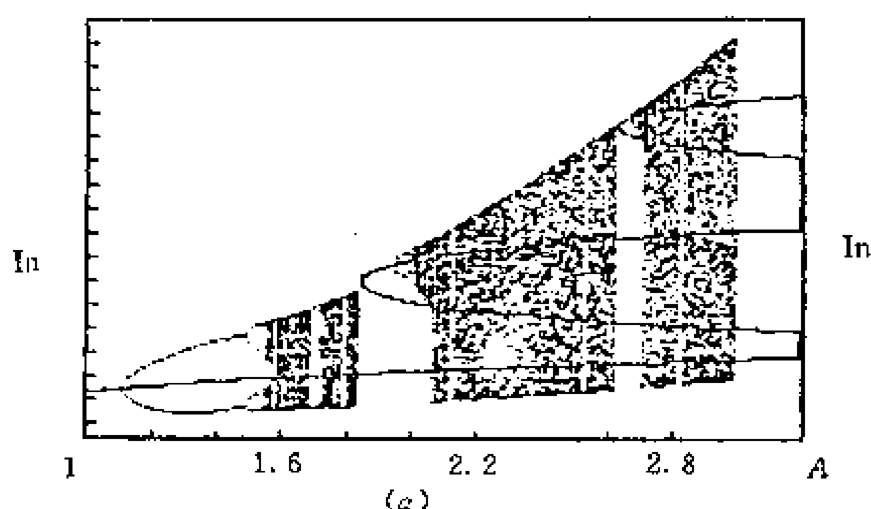


图 5-4-2(a)　I_n-A_n 分岔图 $B=0.4$，　$\phi_0=0$

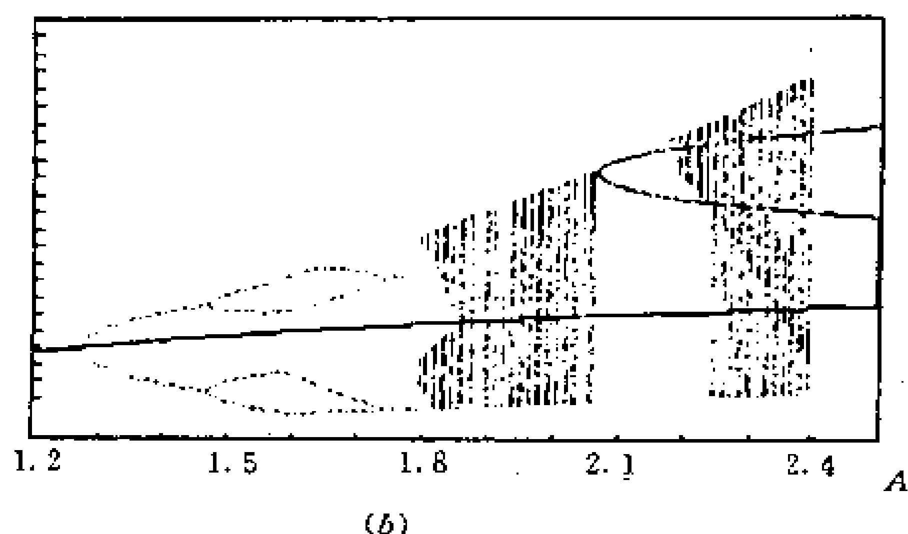


图 5-4-2(b)　I_n-A_n 分岔图 $B=0.4$，　$\phi_0=0.5\pi$

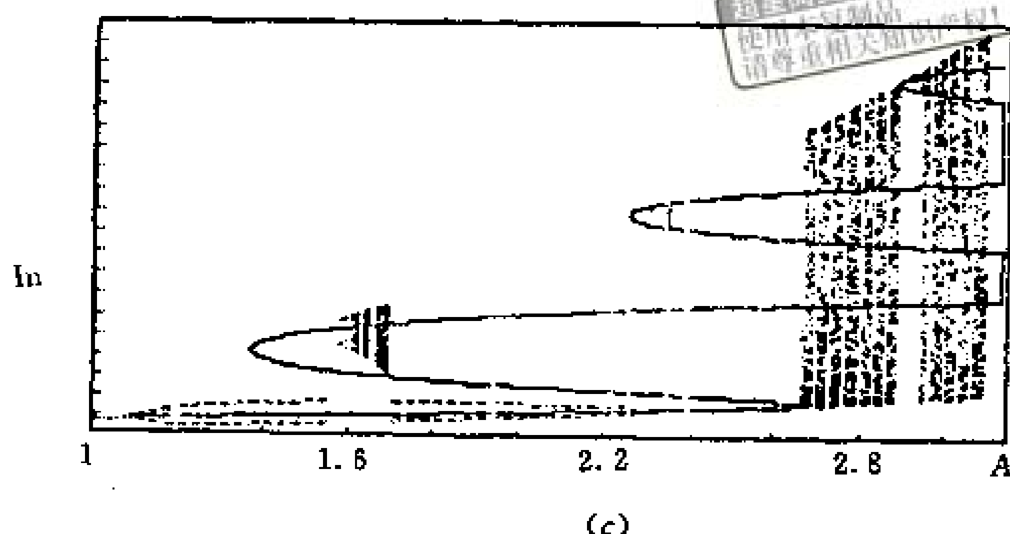


图 5-4-2(c) I_n-A_n 分岔图 $B=0.4$， $\phi_0=1.5\pi$

危机。进一步计算 I_n-ϕ_0 分岔图，当 $A=1.8$ 时，如图 5-4-3(a) 所示；当 $A=2$ 时，如图 5-4-3(b) 所示。从中看出余弦函数引起的一些性质。

再来分析系统在有限弛豫情况下的动态特性。类似于(5-4-11)式建立过程，在 $B\ll1$，A^2B 固定情形下，得到

$$|e(t)|^2=A^2\{1+2B\cos[\theta(t)-\phi_0]\} \tag{5-4-16}$$

将上式代入(5-4-3)式，得到

$$\gamma_{\parallel}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t)=-\theta(t)+A^2\{1+2B\cos[\theta(t-t_R)-\phi_0]\} \tag{5-4-17}$$

采用二阶龙格-库塔法，数值计算(5-4-17)式。在计算过程中设 $B=0.4$，$\phi_0=0$，$\gamma_{\parallel}t_R=10$，取步长 $\Delta t=0.005t_R$ 舍去前 20000 次结果，以保证数值解的正确性。同时采用快速付立叶变换对时间解序列进行功率谱分析，采样点 $N=2048$。数值计算上述方程，得到光场的时间波形、相空间轨迹和功率谱，如图 5-4-4、图 5-4-5、图 5-4-6、图 5-4-7 和图 5-4-8 所示。

由以上各图看出，随着入射光场 A 的增加，输出光场首先进入周期为 $2.26t_R$ 的二倍周期运动(图 5-4-4(a))，然后进入周期为

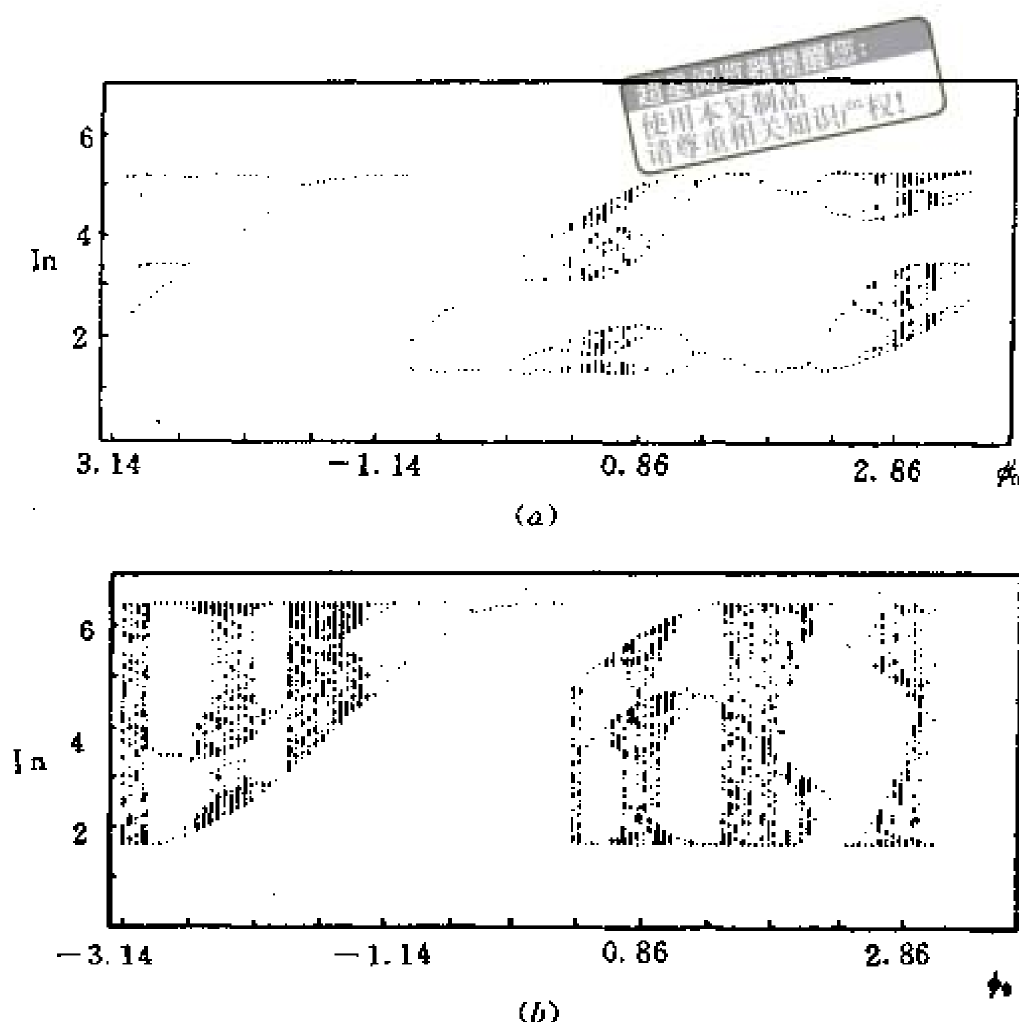


图 5-4-3 I_n-ϕ_0 分岔图 $B=0.4$

(a) $A=1.8$, (b) $A=2$

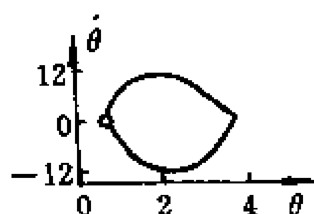
4.5t_R 的四倍周期运动(图 5-4-5(a)),随后进入混沌(图 5-4-6(a)),在混沌区还出现周期为 2.29t_R 的周期窗口(图 5-4-7(a)),最后进入混沌(图 5-4-8(a))。与上述过程相对应的相空间轨迹是有趣的,对于周期运动,相空间轨迹在两端角处出现的有趣的曲折,而且在这里的运动速度很慢,这对应着时间波形的过冲现象。

H. Nakatsuka 等人[6]使用具有非线性折射率的光纤作为介质构成全光学型光学双稳态系统,以 Nd^{3+}:YAG 激光器的激光的二次谐波作为入射光场,实验表明,随 A 增加,系统经周期加倍进入混沌。

现在讨论混合型光学双稳态混沌。以第四章第一节所述的布拉格型声光光学双稳态系统(图 4-1-5)为例,当系统的响应比衰减



(a)



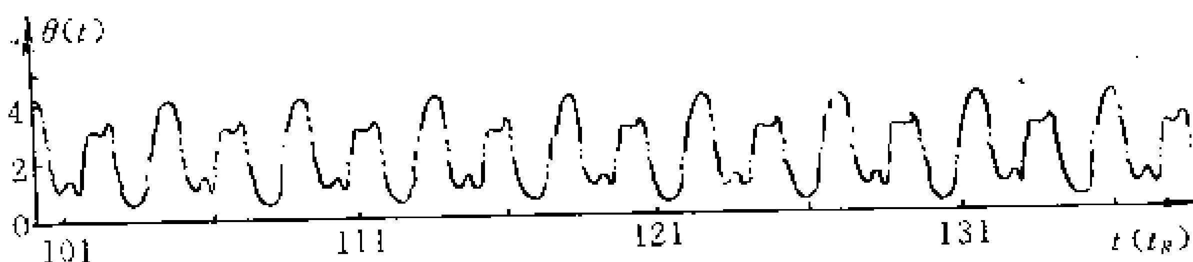
(b)



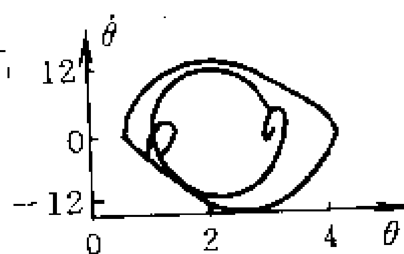
(c)

图 5-4-4　$A=1.5$

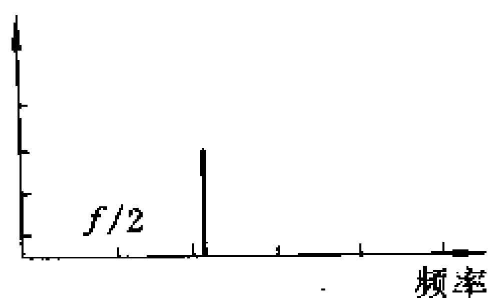
(a) 波形，(b) 相空间轨迹，(c) 功率谱



(a)



(b)



(c)

图 5-4-5　$A=1.6$

(a) 波形，(b) 相空间轨迹，(c) 功率谱

快得多时，由(4-1-15)式可得到加在声光调制器上的电压有下列

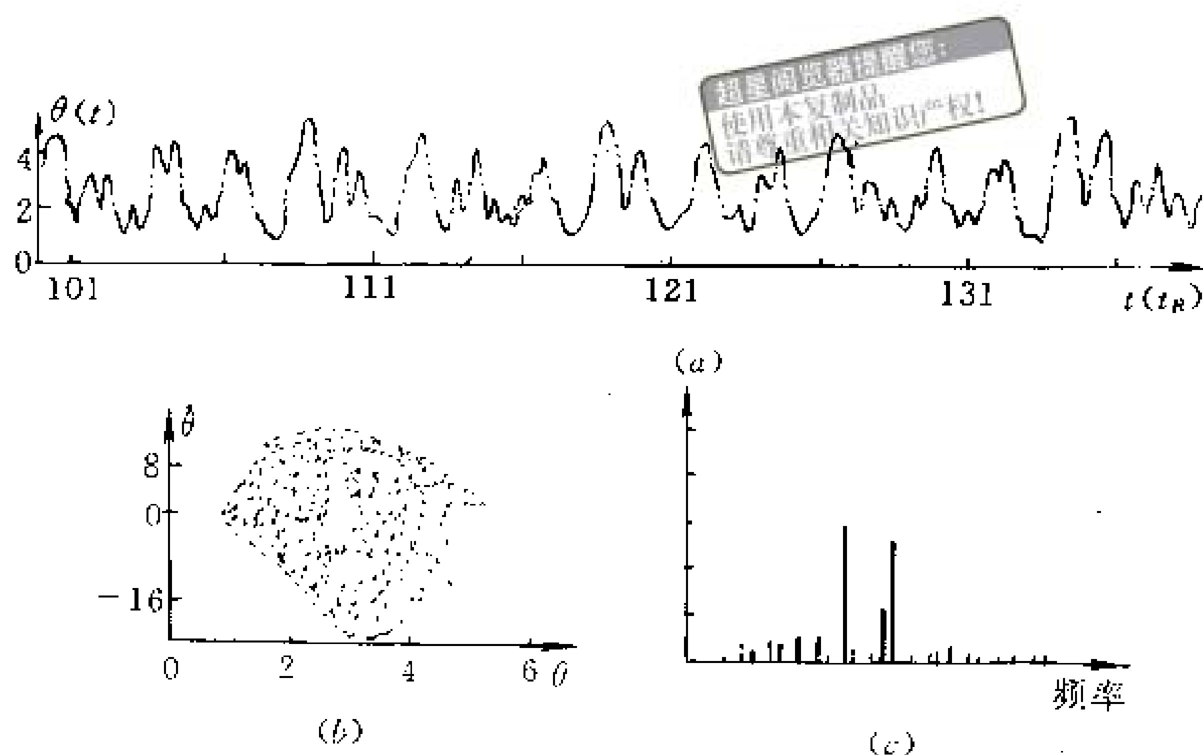


图 5-4-6　$A=1.9$

(a) 波形，(b) 相空间轨迹，(c) 功率谱

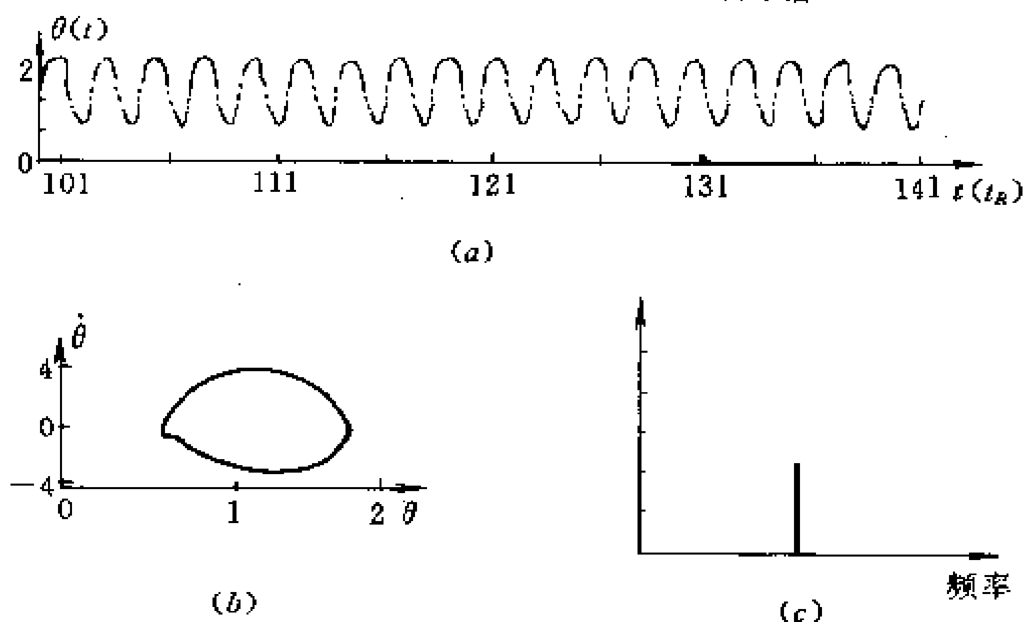


图 5-4-7　$A=2$

(a) 波形，(b) 相空间轨迹，(c) 功率谱

关系：

$$u_{n+1}=a-\zeta\sin^2\frac{\pi}{b}(u_n-u_0) \tag{5-4-18}$$

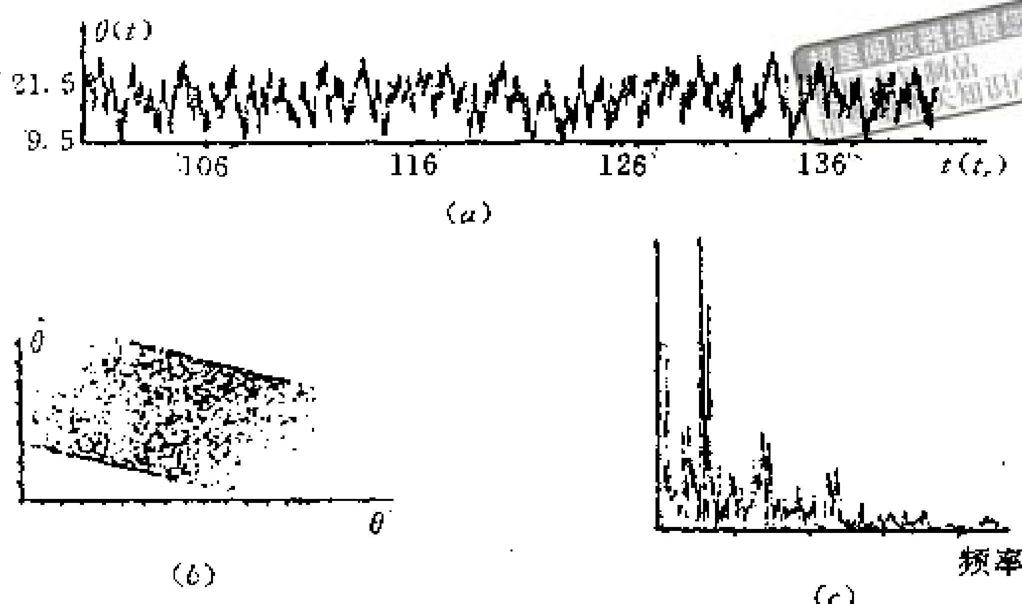


图 5-4-8　$A=4$

(a) 波形，(b) 相空间轨迹，(c) 功率谱

上式中右端的正弦函数平方表示布拉格型声光器件的传输系数，u 是声光调制器输入端的电压，b 是由声光系统决定的固有常数，ζ 与入射的光强成正比，若令 $X_{n+1}=\frac{\pi}{b}u_{n+1}$，则上式为

$$X_{n+1} = \pi A - r\sin^2(X_n - X_0) \tag{5-4-19}$$

上式中 A 表示放大器上的偏压，X_0 表示声光调制器的驱动器的输入，$r=I_i\alpha/b$，I_i 是输入光强，α 是总体增益。对于动态情形，根据(4-1-15)式，布拉格型声光光学双稳态系统的延时方程则为

$$\tau\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = -X(t) + \pi\{A - \mu\sin^2[X(t-\tau_D) - X_0]\} \tag{5-4-20}$$

上式中 τ_D 是系统的总延时，τ 为系统的响应时间，μ 是与入射强度成正比的分岔参数。

关于布拉型声光光学双稳态系统的混沌，由(5-4-19)式可以看出，随分岔参数 r 变化，系统经倍周期分岔过程进入混沌，其分岔图如图 5-4-9 所示[7]。

使用(5-4-20)式可以讨论噪声对声光光学双稳态系统进入混

沌的影响。在快速响应情形，由(5-4-20)式得到：

$$X(t) = \pi\{(A + m\xi_1) - (\mu + n\xi_2)\sin^2[X(t - \tau_D) - X_0]\} \tag{5-4-21}$$

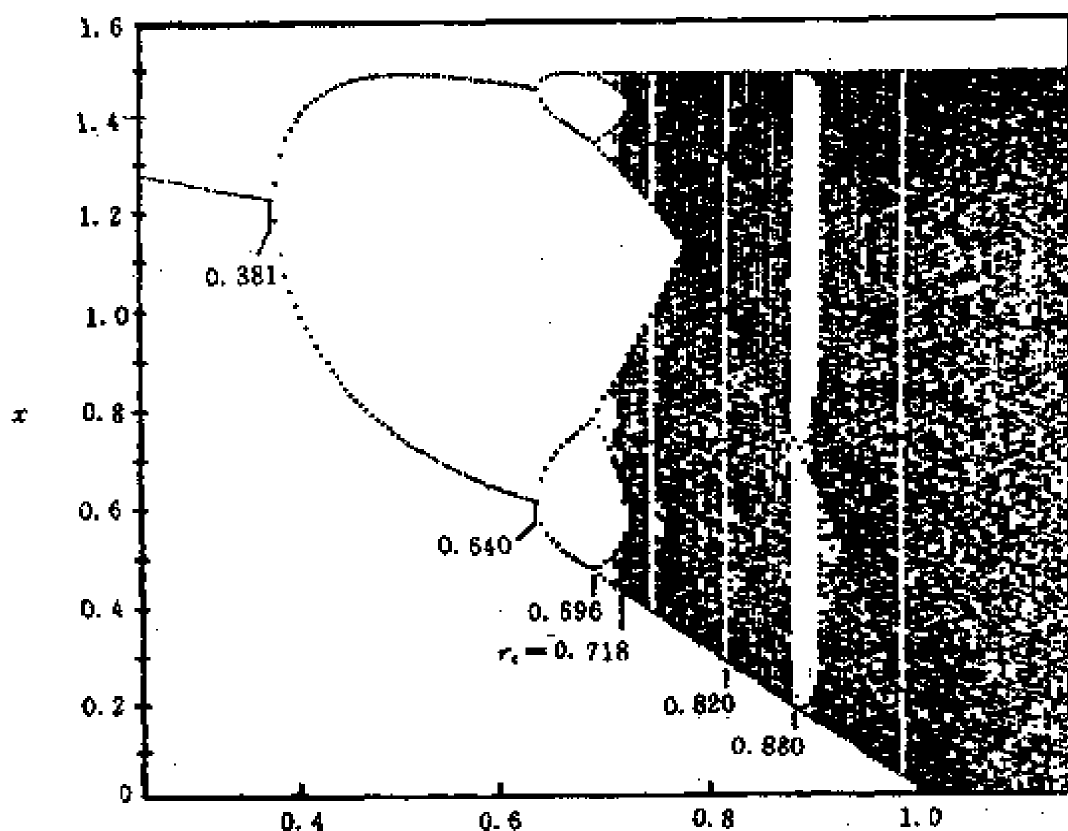
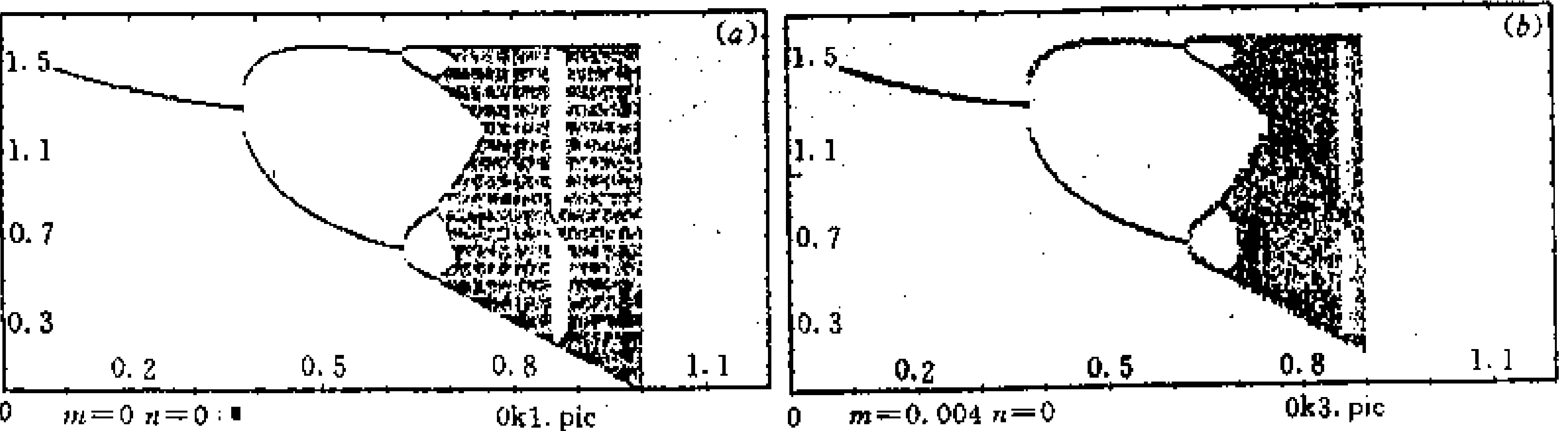
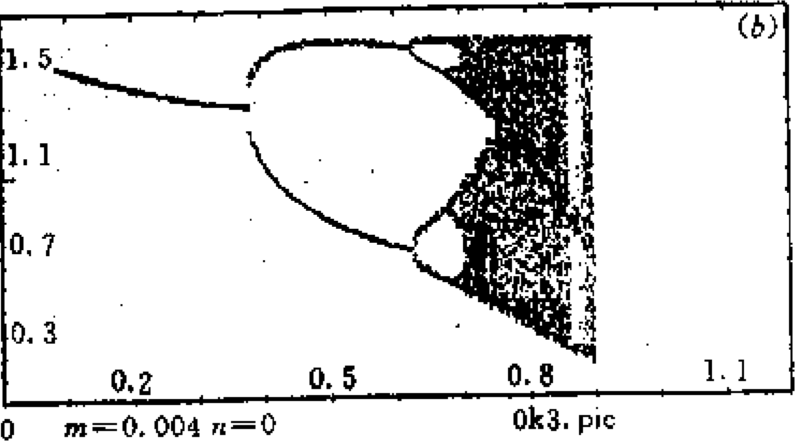


图 5-4-9 布拉格型声光光学双稳态系统分岔图

上式中 ξ_1 和 ξ_2 表示高斯随机过程，平均值为零，其关连函数 $D(t-t')=\delta(t-t')$，n 和 m 分别表示倍增噪声和附加噪声的振幅。按照上式使用微机数值计算附加噪声 $m\xi_1$ 对系统分岔状态和混沌的影响如图 5-4-10 所示，同样计算出倍增噪声的影响，如图 5-4-11 所示。

噪声对布拉格型声光光学双稳态系统的分岔和混沌的影响，实验结果如图 5-4-12 所示[8]，其中图 5-4-11(*a*)是附加噪声的影响，图 5-4-11(*b*)是倍增噪声出现的情形。

由上述结果看出，系统的分岔状态对外界影响非常灵敏，这可能导致一系列的应用。

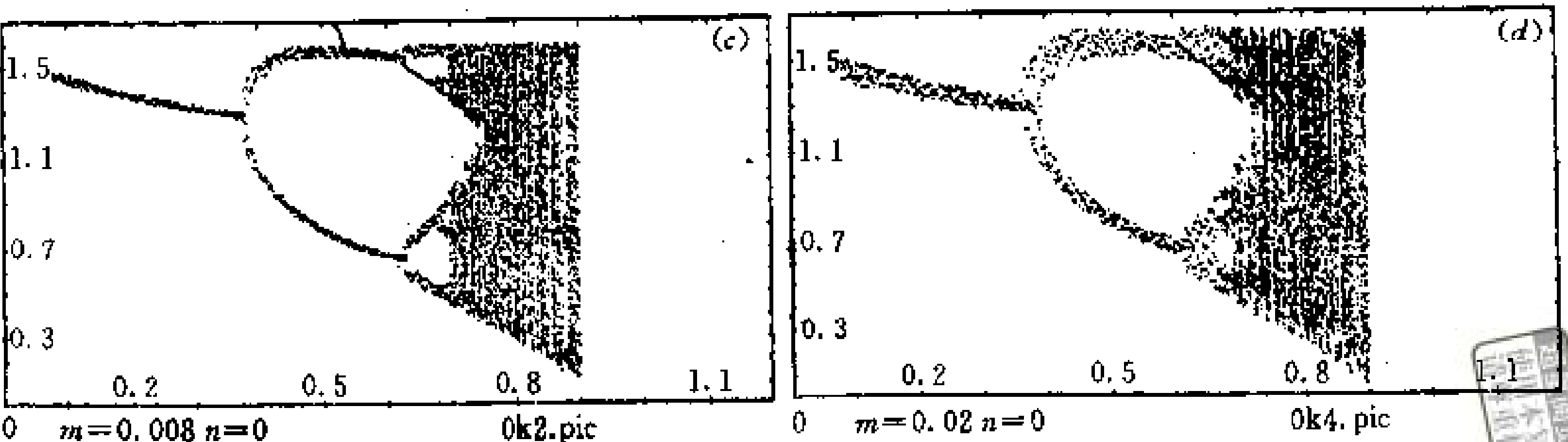
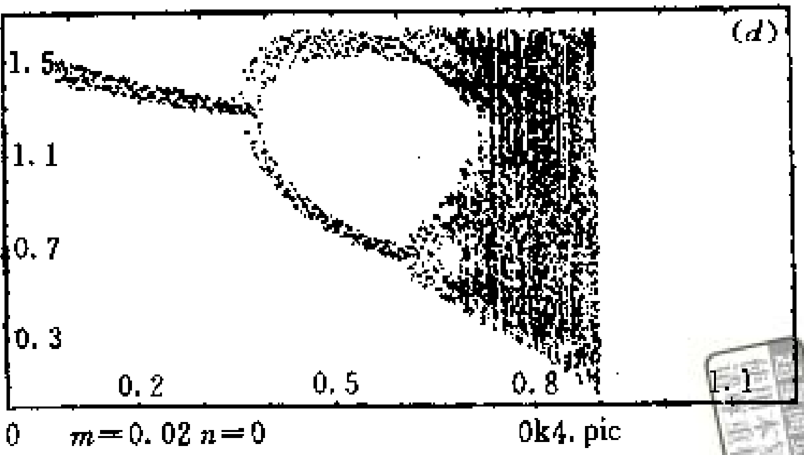



图 5-4-10 附加噪声的影响

(a) $m=0$， (b) $m=0.004$， (c) $m=0.008$， (d) $m=0.02$

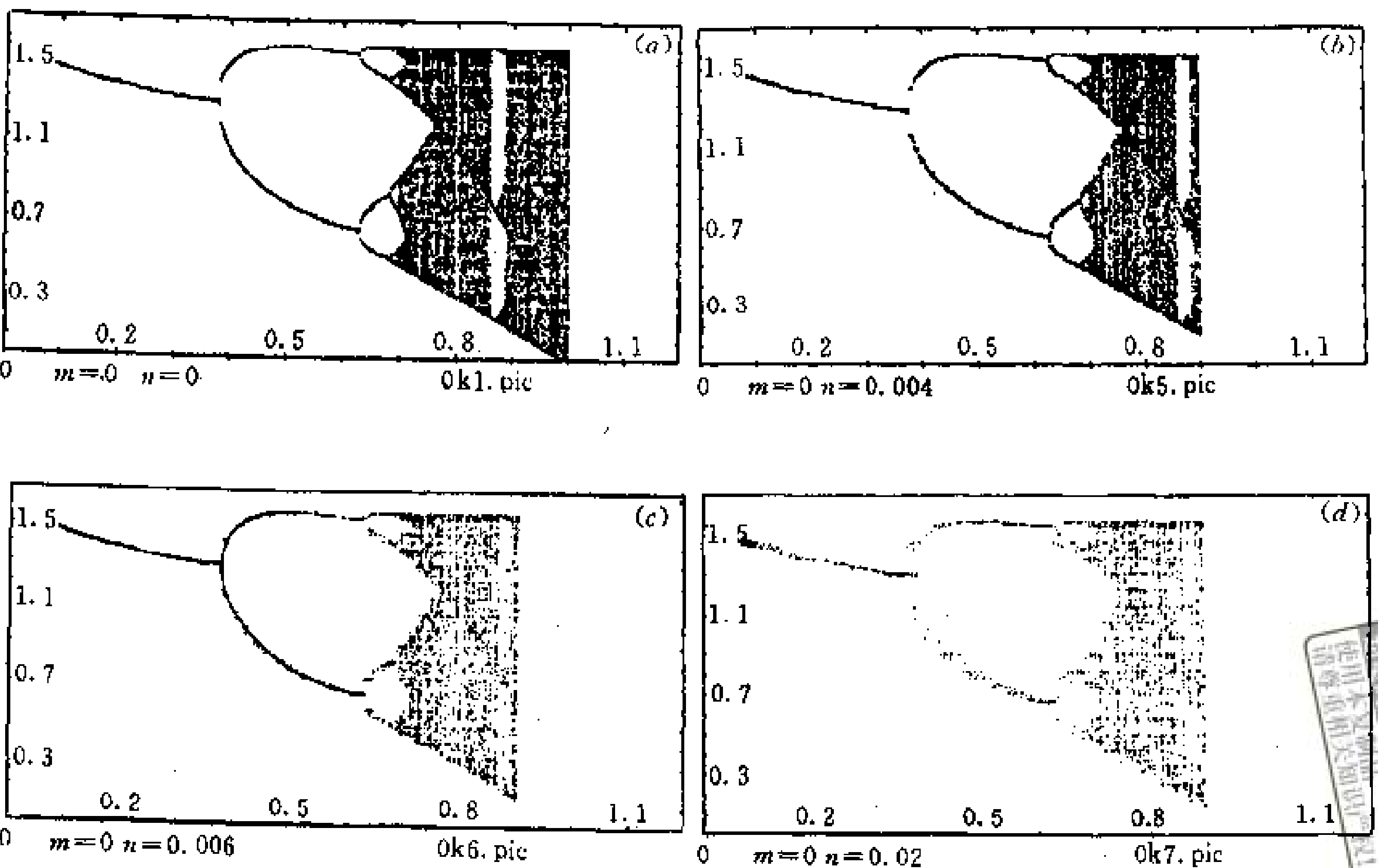


图 5-4-11 倍增噪声对分岔的影响

(a) $n=0$, (b) $n=0.004$, (c) $n=0.008$, (d) $n=0.02$

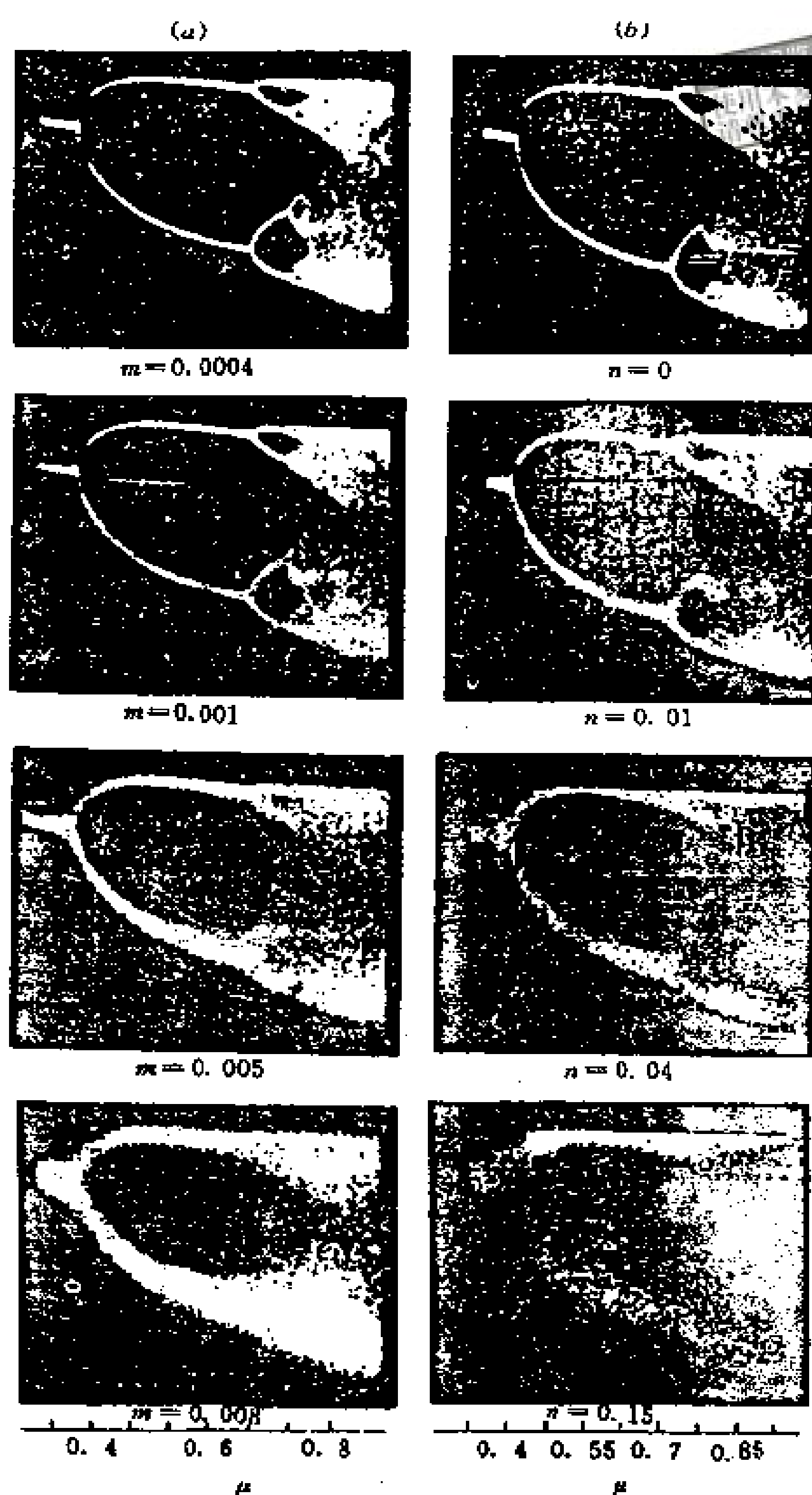


图 5-4-12 噪声对分岔影响的实验结果

(a) 附加噪声的影响 (b) 倍增噪声的影响

§ 5-5　激光器的不稳定性

早在 50 年代人们就注意到了微波量子放大器和振荡器的不稳定性现象，激光器研制成功以后，在 60 年代人们从理论上研究了均匀加宽激光器的不稳定性，并进而预言激光器存在混沌。最早在实验上观测并进行过系统研究的激光器不稳定性和混沌是在非均匀加宽激光器。

一、均匀加宽激光器不稳定性

大致可分为两类，一类是单模均匀加宽激光器的不稳定性，它起源于激光器工作物质反转粒子数的脉动发生在单一波长上，主模向它附近的两个旁模转移能量，当这三个频率的光具有净增益时，导致建立多模振荡。1975 年哈肯发现描写这类激光器不稳定性的麦克斯韦-布洛赫方程，在形式上与描写大气运动的洛仑斯方程一致，因而进一步预言有激光混沌存在。但由于要求条件苛刻、直到 1985 年才有维斯(C. O. Weiss)等人在实验上观察到[9]。维斯等人实验用的是环形腔 NH_3 分子激光器如图 5-5-1 所示，腔长 2m

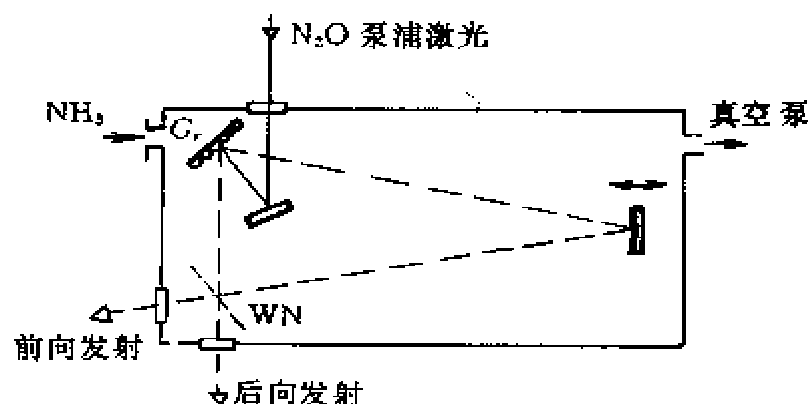


图 5-5-1　NH_3 分子激光器

用 N_2O 激光器的 $P(13)$ 支谱线的激光作泵浦源，NH_3 在适当气压

下，谱线为均匀加宽，输出激光为 TEM_{00} 模，波长为 81.5μm。实验结果如图 5-5-2 所示，其中图 5-5-2(*a*) 为 NH_3 激光器不稳定性输出，然后按周期加倍分岔进入混沌，如图所示。

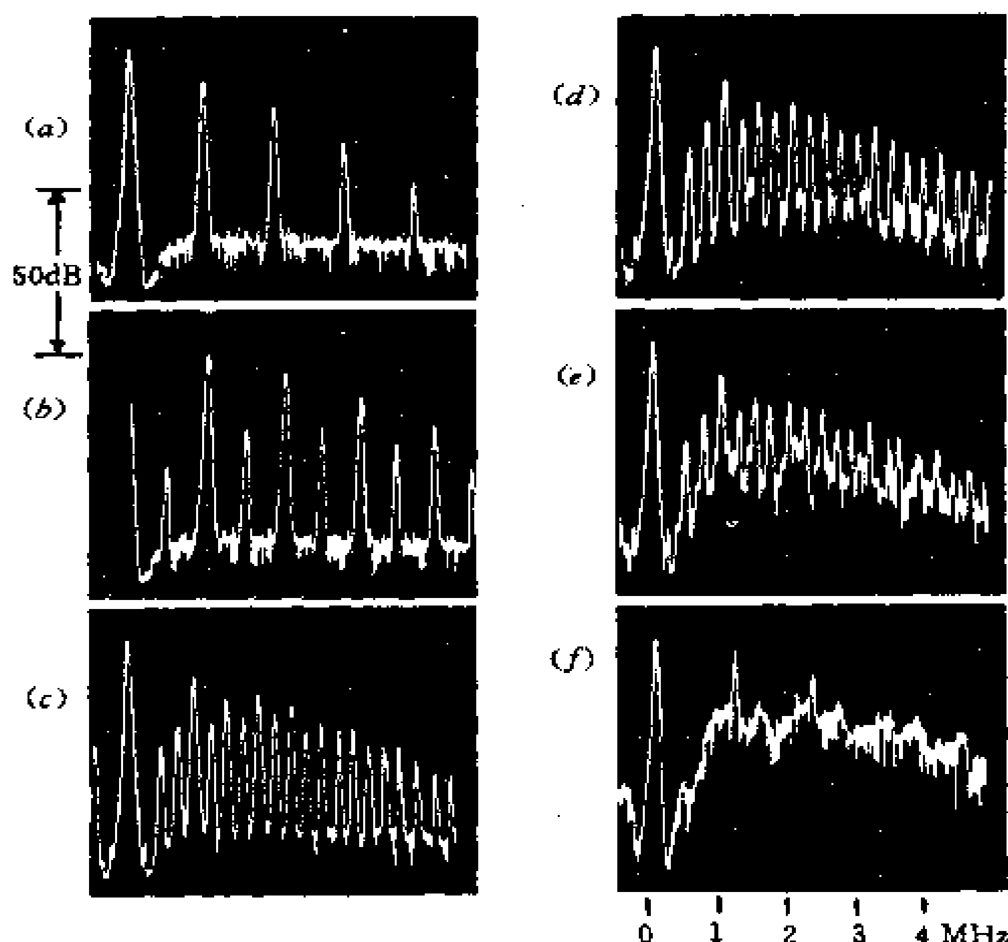


图 5-5-2 NH_3 分子激光器不稳定性和混沌

均匀加宽激光器的另一类不稳定性是多模运转时出现的，这时均匀加宽激光器同时有几个不同波长的模振荡，由于反转粒子数脉动，能量从中心模式向旁模转移，以补偿由于中心模式饱和造成的增益下降。

二、非均匀加宽激光器不稳定性

较比典型的是卡斯泼逊不稳定性。1978 年卡斯泼逊公布了关于连续激发的 Xe 激光器不稳定性实验结果，实验用的放电管内径为 5.5mm，激活区长 1m，腔长 1.2m，放电管内装有热阴极。激

光波长为 3.51μm，损耗约 4%，最高增益～20cm^{-1}，这条谱线有很大的非均匀加宽：$\Delta\nu_D/\Delta\nu_h \simeq 30$，$\Delta\nu_D$ 为都普勒加宽的频宽，$\Delta\nu_h$ 为均匀加宽的频宽。当连续放电电流 $I=40$mA 和 $I=50$mA 时，观察到自脉冲列，如图 5-5-3 所示。这种不稳定性的物理起因是在高增益激光器工作物质中，由于强的共振色散引起的模分裂，导致同一个

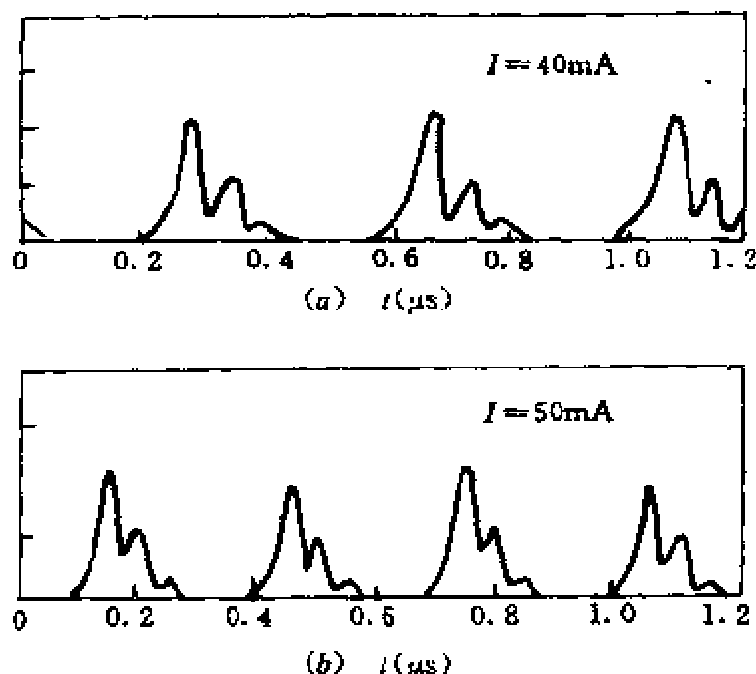


图 5-5-3　Xe 激光器的不稳定性

纵模（波长）可能有几个频率的光。现在来说明这一点，设激光器腔长为 L，工作物质长为 l，折射率为 $n(\omega)$，对于平面平行腔激光器的纵模，应满足下列条件：

$$ln(\omega) + (L - l) = q\frac{\lambda}{2} \tag{5-5-1}$$

$$q = 1,2,3,\cdots$$

式中 λ 为激光波长，可以把上式表示为

$$\omega_q - \omega = \frac{l}{L}[n(\omega) - 1]\omega \tag{5-5-2}$$

式中 ω_q 为

$$\omega_q = q\frac{c}{L} \tag{5-5-3}$$

上式中 ω_q 是空腔的共振频率，ω 是激光频率。(5-5-1)式表明，对于同一个纵模，可以存在几个频率 ω。根据(5-5-2)式，由直线 $y=\omega_q-\omega$ 与色散曲线 $y=l[n(\omega)-1]/L$ 的交点可求出激光频率 ω，如5-5-4所示，图上的横坐标 x 与 $\omega-\omega_0$ 成正比。由图可见，由于这种自发的模分裂效应，对应单一的纵模，可以在几个频率上产生激

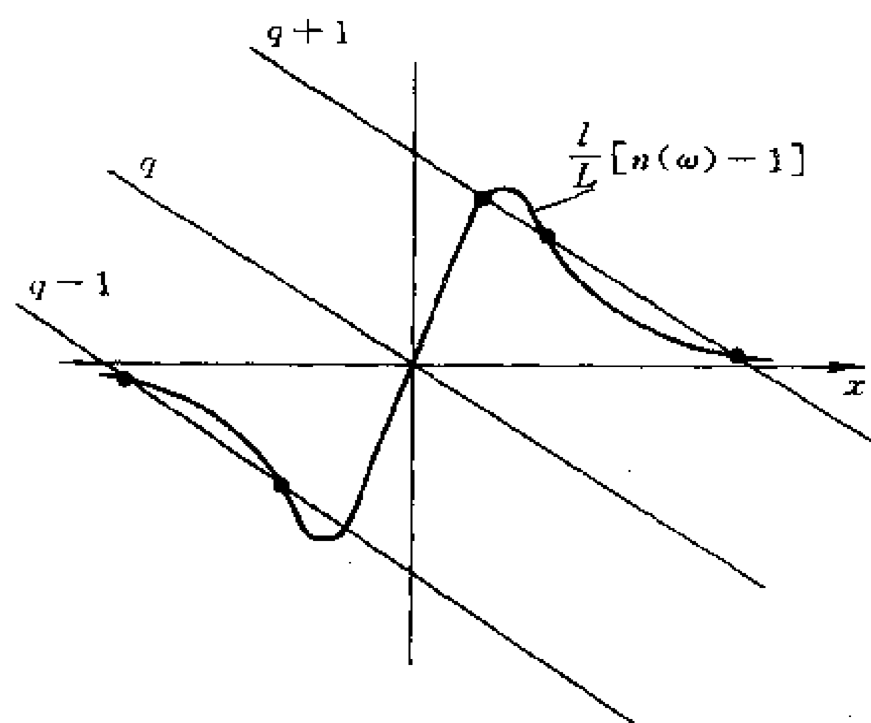


图 5-5-4

光。这样，当激光器进入饱和时，增益曲线出现烧孔现象，工作物质色散曲线发生畸变，如图 5-5-5 上曲线(2)所示，对应于谱线中心的纵模发生分裂，当旁频光有增益，发生位相锁定时，则会出现光脉冲。卡斯泼逊不稳定性在坏腔条件下，很容易观察到。

三、激光器不稳定性判据

为了判定激光器不稳定性，卡斯泼逊定义了两种阈值，从气体激光器半经典理论出发，经过较比繁复的推导过程，建立了研究激光器不稳定性和混沌的方程组，得到经过规格化的激光器工作物质宏观电极化强度实部 P_r、虚部 P_i、激光的电场强度实部 A_r 以

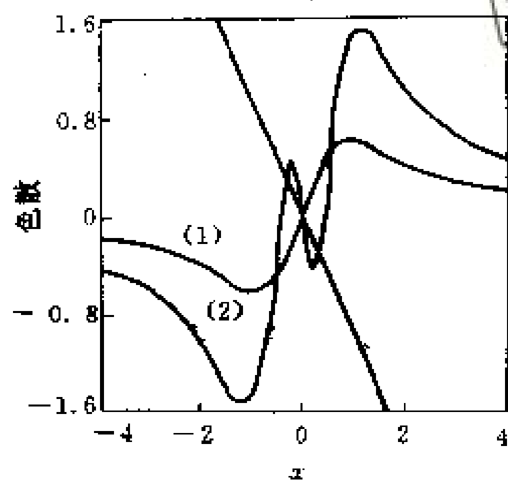


图 5-5-5　工作物质色散曲线的畸变

及反转粒子数 D 服从的方程为[10,11]

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = -\gamma_{\perp}(P_r - vP_i) \tag{5-5-4}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = -\gamma_{\perp}(P_i + vP_r + A_r D) \tag{5-5-5}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \lambda_d - \gamma_{\parallel}(D - A_r P_i) \tag{5-5-6}$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial t} = -\gamma_c\left(A_r + \int_{-\infty}^{\infty} P_i \mathrm{d}v\right) \tag{5-5-7}$$

上式中 v 是气体工作物质原子的运动速度，$\lambda_d(v)$是与速度有关的泵浦速率，$\gamma_{\perp}$ 是宏观电极化强度的弛豫速率，$\gamma_{\parallel}$ 是工作物质粒子数衰减速率，γ_c 是激光的电场在腔内的损耗速率。上述方程组是在假设激光器调谐到谱线中心处情形下得到的。

1. 均匀加宽激光器的不稳定性判据

首先讨论均匀加宽激光器的不稳定性判据，为此引入

$$P_t = \int_{-\infty}^{\infty} P_i \mathrm{d}v, \quad \lambda_t = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_d \mathrm{d}v, \quad D_t = \int_{-\infty}^{\infty} D \mathrm{d}v \tag{5-5-8}$$

$$r = \frac{\lambda_t}{\gamma_{\parallel}} \tag{5-5-9}$$

考虑到在通常情形下速度 v 很小，(5-5-4)和(5-5-5)式中的 $v\to 0$，则上述四个方程变为

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = -\gamma_\perp (P_t + A_r D_t) \tag{5-5-10}$$

$$\frac{\partial D_t}{\partial t} = -\gamma_\parallel (D_t - r - A_r P_t) \tag{5-5-11}$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial t} = -\gamma_c (A_r + P_t) \tag{5-5-12}$$

式中 r 表示实际的泵浦速率与要求产生激光的泵浦速率之比。

(1) 稳定性判据 1——第一种类型阈值：求激光器从稳定进入不稳定的最小阈值参数 r，就是说当取这样的 r 值时，对激光器稳定运转状态的任何无限小的扰动，都会引起有关变量离开稳定值。为此，先求出(5-5-10)—(5-5-12)式的稳态解，得到 P_t、D_t 和 A_r 的稳态解的值 P_{ts}、D_{ts}和 A_{rs}，然后令

$$\delta P = P_t - P_{ts} \tag{5-5-13}$$

$$\delta D = D_t - D_{ts} \tag{5-5-14}$$

$$\delta A_r = A_r - A_{rs} \tag{5-5-15}$$

求(5-5-10)—(5-5-12)式的变分，将上式代入，并进行线性化，得到三个线性方程。再设 δP、δD 和 δA_r 的解的形式为 $\exp(st)$，其中 s 为复数，如上一节讨论的那样，根据 s 取值情况，判断解的稳定性。这样，得到关于 r 的阈值条件表示式为

$$r_{th} = 1 + \frac{(\gamma_\perp - \gamma_\parallel + \gamma_C)(\gamma_\perp + \sigma)}{\gamma_\perp (\gamma_C - \gamma_\perp - \gamma_\parallel)} \tag{5-5-16}$$

当均匀加宽激光器的 r 大于 r_{th}时，稳态解的任何扰动，都将增长。上述条件也可表示为 $r_{th}>1$，这相当要求：

$$\gamma_C > \gamma_\perp + \gamma_\parallel \tag{5-5-17}$$

采用平均场理论分析，也可得到这一结果。

现在引入 $X=\gamma_\perp/\gamma_c$，$Y=\gamma_\parallel/\gamma_\perp$，(5-5-16)和(5-5-17)式可表示为

$$r_{th} = 1 + \frac{(1 + X + XY)(1 + X)}{X(1 - X - XY)} \tag{5-5-18}$$

$$\gamma_c < \frac{1}{1 + Y} \tag{5-5-19}$$

以 Y 作参变数，按(5-5-18)式画出 r 与 X 的关系曲线，如图 5-5-6 所示。$r=1$ 表示激光器的普通阈值，由图看出，均匀加宽激光器的不稳定性脉冲列，只有在远高于激光器的普通阈值时，才能发生。

(2)稳定性判据 2——第二种类型阈值：它表示非阻尼脉冲解可以存在的阈值参数的最小值。采用数值计算法，求这一判据。研究不稳定区域内脉冲的变化，直到脉冲停止为止，这样得到图 5-5-7 上的曲线。由图上的曲线看出，它比第一种类型阈值低得多，所以对于均匀加宽激光器，得到连续的脉冲列是不困难的。

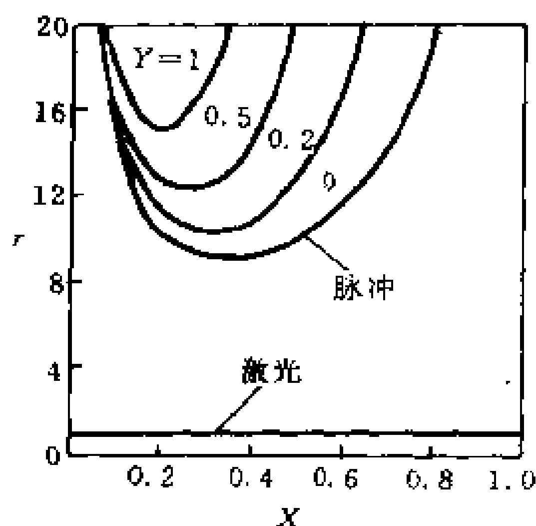


图 5-5-6 均匀加宽激光器稳定性判据 1

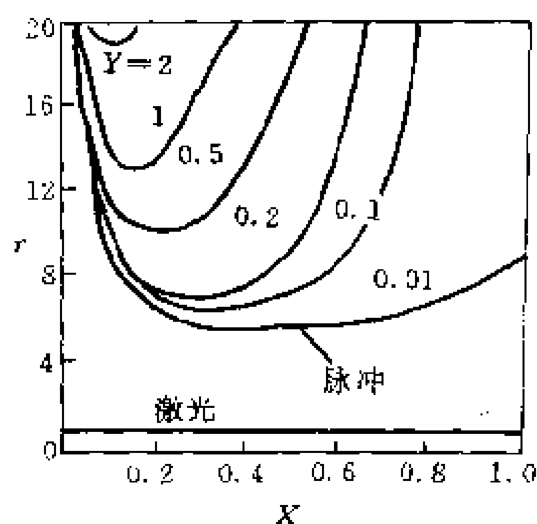


图 5-5-7 均匀加宽激光器稳定性判据 2

图 5-5-8 画出了均匀加宽激光器的三种阈值，上边的曲线表示第一种类型阈值，即扰动不稳定性边界，下边的曲线是维持脉冲列的最低阈值，直线 $r=1$ 是通常的激光器阈值。图上的临界区域表示能否产生脉冲，与初始条件和输入噪声水平有关。

2. 非均匀加宽激光器的不稳定性

对于非均匀加宽激光器的不稳定性，进行与上面完全类似的

讨论，当假设激光器的泵浦速率 λ_d 和反转粒子数 D_r 都是高斯函数形式的速度分布式，从(5-5-4)式—(5-5-7)式出发，研究结果表明[10]，非均匀加宽激光器不稳定性的阈值比均匀加宽激光器低，而且两种阈值基本一致，如图 5-5-9 所示。

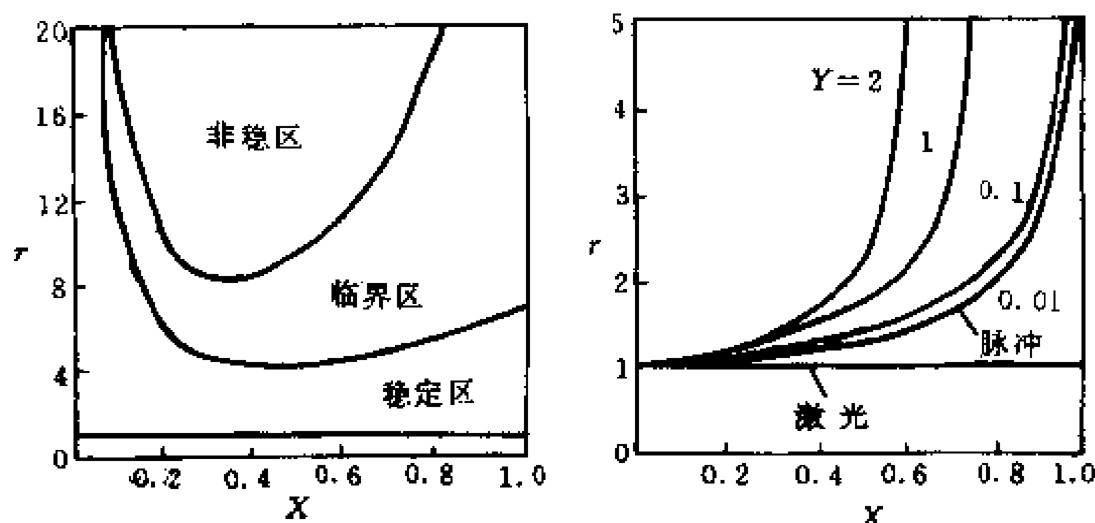


图 5-5-8 均匀加宽激光器三种阈值的比较　图 5-5-9 非均匀加宽激光器稳定性判据

§5-6　激光混沌

一、均匀加宽激光器的混沌

对于均匀加宽激光器，从研究混沌的观点可以把它们分为三类[12]：

A 类均匀加宽激光器　例如染料激光器，它们满足条件 $\gamma_c \ll \gamma_\perp$、$\gamma_\parallel$，即激光的电场衰减速率远小于工作物质的宏观电极化强度和反转粒子数的衰减速率。如用(5-3-12)—(5-3-14)式形式的麦克斯韦-布洛赫方程描写激光器的运转，对于这种情形，可绝热消除方程中的宏观电极化强度和反转粒子数这两个量，这样，系统可以用一个关于光场的方程描写。根据§5-2 节的分析，对于这种

情况，必须外加一个恒定的相干场，以增加自由度。为了得到混沌，需要调制一个控制参数，即外场、泵浦速率或者腔内的损耗。

B类均匀加宽激光器 例如红宝石、Nd:YAG、半导体以及CO_2激光器时，它们的γ_c、$\gamma_{\parallel} \ll \gamma_{\perp}$。可以在(5-3-12)—(5-3-14)式形式的麦克斯韦-布洛赫方程中绝热地消除宏观电极化强度，这类激光器的动力学行为用两个耦合的非线性方程描写，一个是关于光场的方程，另一个是关于反转粒子数的方程，实际上就是速率方程组。根据§5-2的分析，对于这类激光器，必须最低增加一个自由度，这可以采取下列措施：

(1)调制激光器的一个参数；

(2)注入一个外场；

(3)增加激光器的模式数目，等等。

C类均匀加宽激光器 这类激光器的$\gamma_c \approx \gamma_{\perp} \approx \gamma_{\parallel}$，一些远红外分子气体激光器属于这一类。哈肯在1975年发现的激光器的麦克斯韦-布洛赫方程在形式上与描写大气运动的洛仑斯方程一致，就是指这类激光器，实际上这类激光器该用完整的(5-3-12)—(5-3-14)式形式的麦克斯韦-布洛赫方程描写。当求出这三个方程的稳态解D_S、E_S和P_S的表示式后，再引入

$$\hat{D} = \frac{D}{D_S} \qquad \hat{E} = \frac{E}{E_S} \qquad \hat{P} = \frac{P}{P_S} \tag{5-6-1}$$

则可将(5-3-12)—(5-3-14)式表示为

$$\dot{\hat{E}} = -\gamma_c \hat{E} + \gamma_c \hat{P} \tag{5-6-2}$$

$$\dot{\hat{P}} = -\gamma_{\perp} \hat{P} + \gamma_{\perp} \hat{E}\hat{D} \tag{5-6-3}$$

$$\dot{\hat{D}} = -\gamma_{\parallel} \hat{D} + \gamma_{\parallel} (\lambda + 1) - \lambda \gamma_{\parallel} \hat{E}\hat{P} \tag{5-6-4}$$

上式中$\lambda = \dfrac{D_0}{D_S} - 1$。若令$x = \sqrt{b\lambda}\,\hat{E}$，$y = \sqrt{b\lambda}\,\hat{P}$，$z = \lambda - \hat{D}$，$b = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}$，$r = \lambda + 1$，$\sigma = \gamma_c/\gamma_{\perp}$，$\tau = \gamma_{\perp} t$，则(5-6-2)—(5-6-4)式即化为(5-2-8)—(5-2-10)式形式的洛仑斯方程。可见这类激光器要用三个自治微分方程描写，而且在形式与洛仑斯方程一致，所以应该

出现混沌，但要求条件较苛刻，长期没有观察到，直到1985年用 NH_3 分子射束激光器才在实验上实现了不稳定性和混沌，如图5-5-2所示。

激光器在自身参数变化情况下出现的不稳定性和混沌，称为主动式的不稳定性；当采取某种外部措施，迫使激光器由稳定进入不稳定或混沌，称为被动式不稳定性。上面讨论的 A 类和 B 类均匀加宽激光器，都要求采取一定的外部措施，使激光器进入混沌，迄今，已有许多这方面的实验结果，下面举几个例子。最早进行这方面研究的是阿雷克(F. T. Arecchi)等人[12]，他们对 CO_2 激光器采取损耗调制，观察到混沌。上面已经指出，CO_2 激光器属于 B 类均匀加宽激光器，描写其运转的两个速率方程可表示为

$$\dot{D} = R - G\phi D - \gamma_{\parallel} D \tag{5-6-6}$$

$$\dot{\phi} = 2G\phi D - \kappa(t)\phi \tag{5-6-7}$$

上式中 D 和 ϕ 分别表示反转粒子数和光子数，R 为泵浦速率，耦合常数 $G=\omega\mu^2/\hbar\varepsilon_0\gamma_{\perp}V$。(5-6-6)式右端第二项表示由于受激辐射过程使 D 减少，第三项表示由于自发辐射过程使 D 减少。(5-6-7)式右端第一项表示由于受激辐射使 ϕ 增加，$\kappa(t)$表示光子数 ϕ 的损耗速率，所以第二项表示由于损耗使 ϕ 的减少。在实验上光子数损耗速率 $\kappa(t)$被调制为

$$\kappa(t) = \kappa_0(1 + M\cos\Omega t) \tag{5-6-8}$$

上式中 M 为调制系数，Ω 为调制角频率。这样，CO_2 激光器又由三个自洽方程描写。实验中的 CO_2 激光器的 $1/\gamma_{\parallel}=0.1\text{ms}\gg 1/\gamma_{\perp}=10^{-8}\text{s}$，耦合常数 $G=0.25\times10^{-4}\text{s}$。采用CdTe电光调制器，晶体长6cm。调制线频率 $f=\Omega/2\pi$，实验发现当 $f=62.7\text{kHz}$ 时，出现 $f/2$ 次谐波；$f=63.80\text{kHz}$ 时，出现 $f/4$ 次谐波；$f=64.00\text{Hz}$ 时，激光器进入混沌。米塔瓦涅(M. Midavaine)等人[13]，通过频率调制，也实现了 CO_2 激光器的混沌。

再如对激光器采取外部反馈措施，使其进入混沌。半导体激光器属于 B 类均匀加宽激光器，如果在半导体激光器的外部加上光

学谐振腔或法-珀标准具，可以使其进入混沌[14]。穆卡(T. Mukai)等人曾用 GaAs 半导体激光器作过类似的实验[15]。实验用 GaAs 激光器长 300μm，外腔长 $L=39$cm，当 $f_c=c/2L\simeq380$MHz 时，观察到不稳定性。增加注入电流，并同时调斜外腔腔镜，则相继产生次谐波 f_c/m，$m=2,3,4$，到第 5 个时，出现混沌。

此外，对激光器注入信号，在激光器内加饱和吸收体等措施，都能使激光器增加自由度，导致进入混沌。甚至因为光的偏振可提供一个附加的自由度，所以控制光的偏振状态，也可使某些激光器进入混沌。

二、非均匀加宽激光器的混沌

对于非均匀加宽激光器，如 He-Ne、A_r^+、He-Xe、Xe 等激光器，不能象均匀加宽激光器那样分类，这是因为非均匀加宽激光器中总是共存几个增益包络，即使是在 $\gamma_c\ll\gamma_\perp$、$\gamma_\parallel$ 情形，模式数目往往也很多，使得有足够的自由度造成这类激光器的混沌。就是在单模运转情形，出现不稳定性和混沌的条件也不如均匀加宽激光器那样严格。

非均匀加宽激光器混沌实验，较比完好的是维斯(C. O. Weiss)等人用 He-Ne 激光器完成的[16]。实验用的外腔式 He-Ne 激光器腔长 2.5m，放电管长 1.6m，内径 2.9mm，管内气压比为：^{3}He：^{20}Ne＝9：1，放电电流 14mA，输出功率 20mW，激光波长 $\lambda=3.39\mu$m。这个实验证实了在研究大气运动时发现的三种通往混沌的途径，在非均匀加宽激光器中也完全存在。图 5-6-1 是实验观测结果。其中图 5-6-1(Ⅰ)显示了经过周期加倍发展为激光混沌的过程；图 5-6-1(Ⅱ)是通过二频途径发展为激光混沌的过程；图 5-6-1(Ⅲ)是以阵发方式形成激光混沌的过程。

乔吉亚(R. S. Gioggia)和亚伯拉罕(N. B. Abraham)在 Xe 激光器中观察到混沌，如图 5-6-2 所示，其中图 5-6-2(a)是波长为 3.51μm 的 Xe 激光器通过二频途径进入混沌的过程；图 5-6-2(b)

是通过周期加倍过程进入混沌[17]。

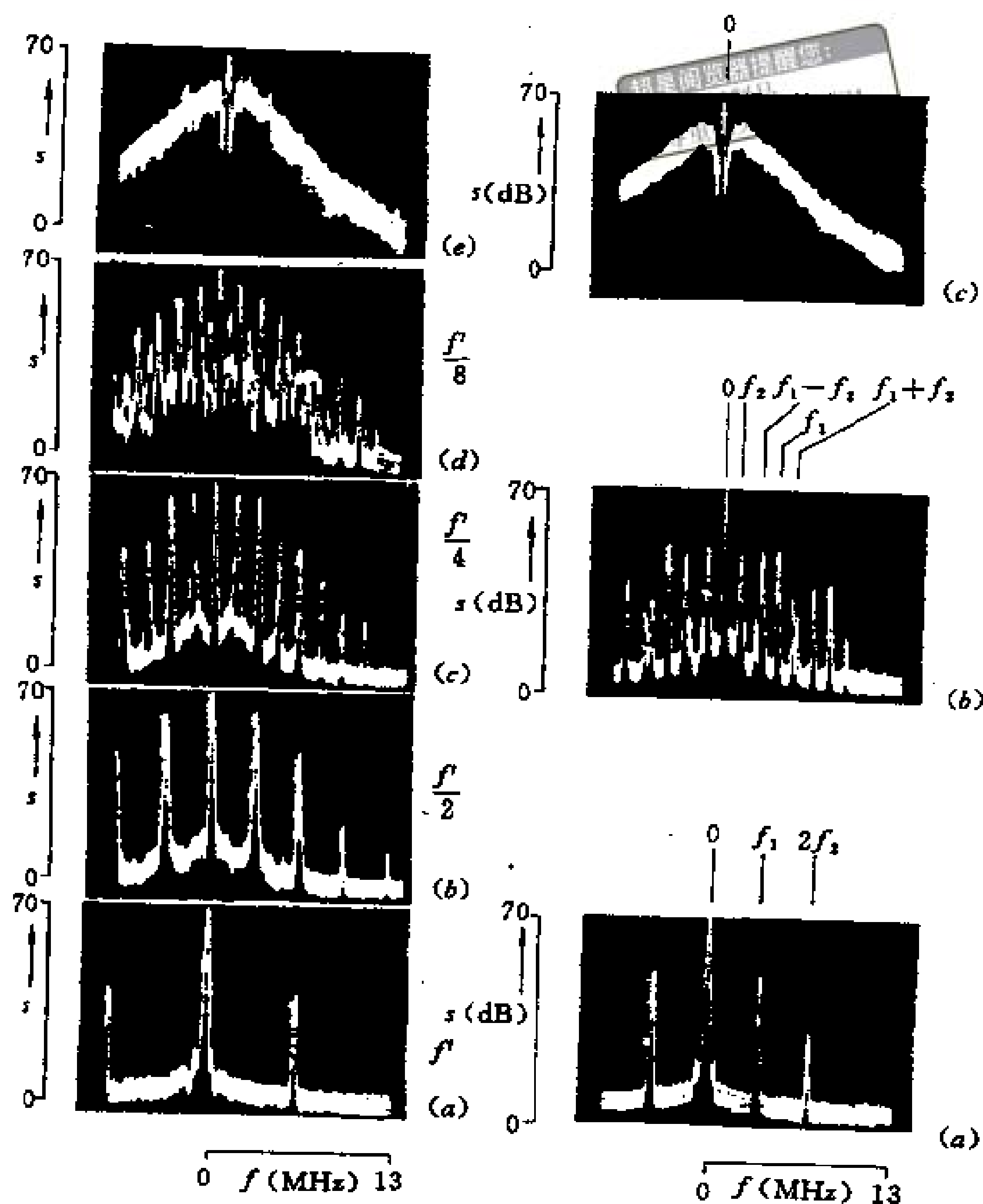


图 5-6-1(Ⅰ) 倍周期分岔途径导致混沌　　图 5-6-1(Ⅱ) 二频途径导致混沌

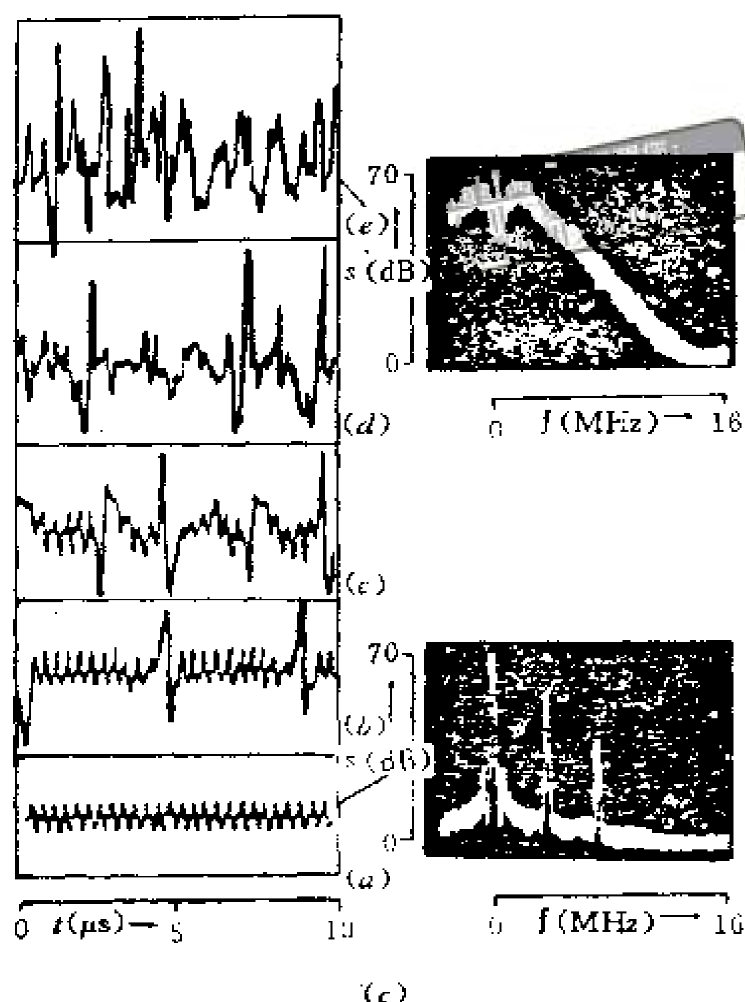
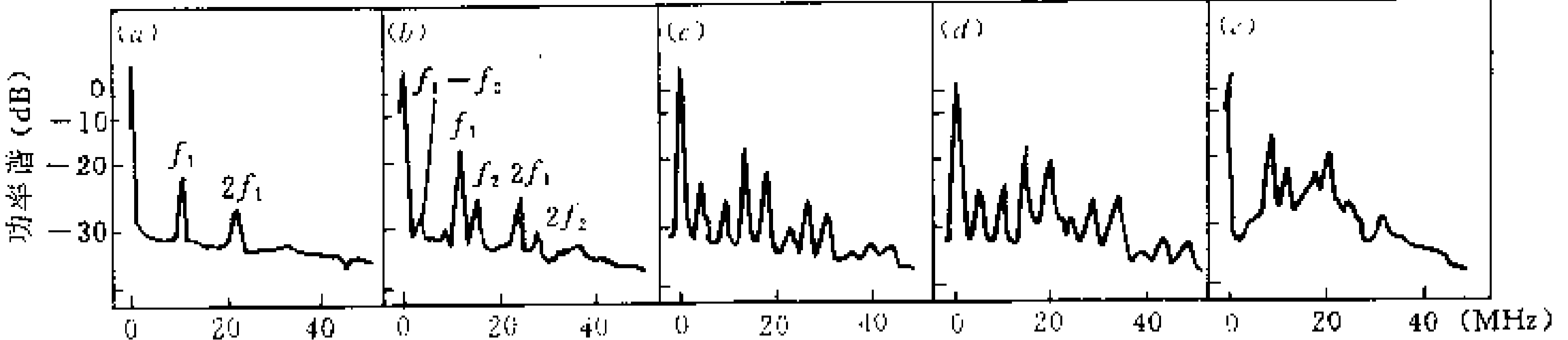


图 5 6-1（Ⅱ） 间歇性暴突导致混沌

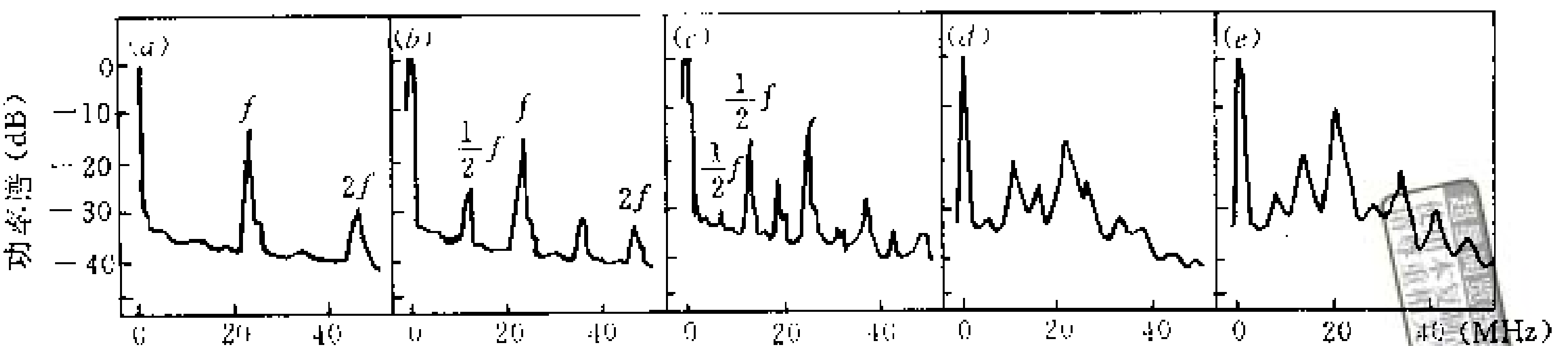
最后要指出的是激光器混沌发射具有普遍性，维斯等人曾对光泵浦的分子激光器作过系统的实验研究，发现 NH_3 分子激光器的 NH_3 分子的转动跃迁产生的激光、振动跃迁产生的激光以及 I_2 分子激光器的 I_2 分子的电子跃迁产生的激光，在很宽阔的范围内，都很容易地观察到周期振荡和混沌。

三、激光混沌的基本性质

激光混沌时间相干性较差，频带较宽，但比自发辐射光的频带窄很多，同时激光混沌仍然保持空间相干性。激光混沌的一阶相关函数



二频途径导致混沌



倍周期分岔导致混沌

图 5-6-2　X_e 激光器混沌

$$g^{(1)}(\tau)=\frac{\langle\mathscr{E}(t+\tau)\mathscr{E}(t)\rangle}{\langle|\mathscr{E}(t)|^2\rangle} \tag{5-6-9}$$

和二阶相关函数

$$g^{(2)}(\tau)=\frac{\langle I(t+\tau)I(t)\rangle}{\langle I(t)\rangle^2} \tag{5-6-10}$$

经过数值计算，分别如图 5-6-3(a)和图 5-6-3(b)所示。

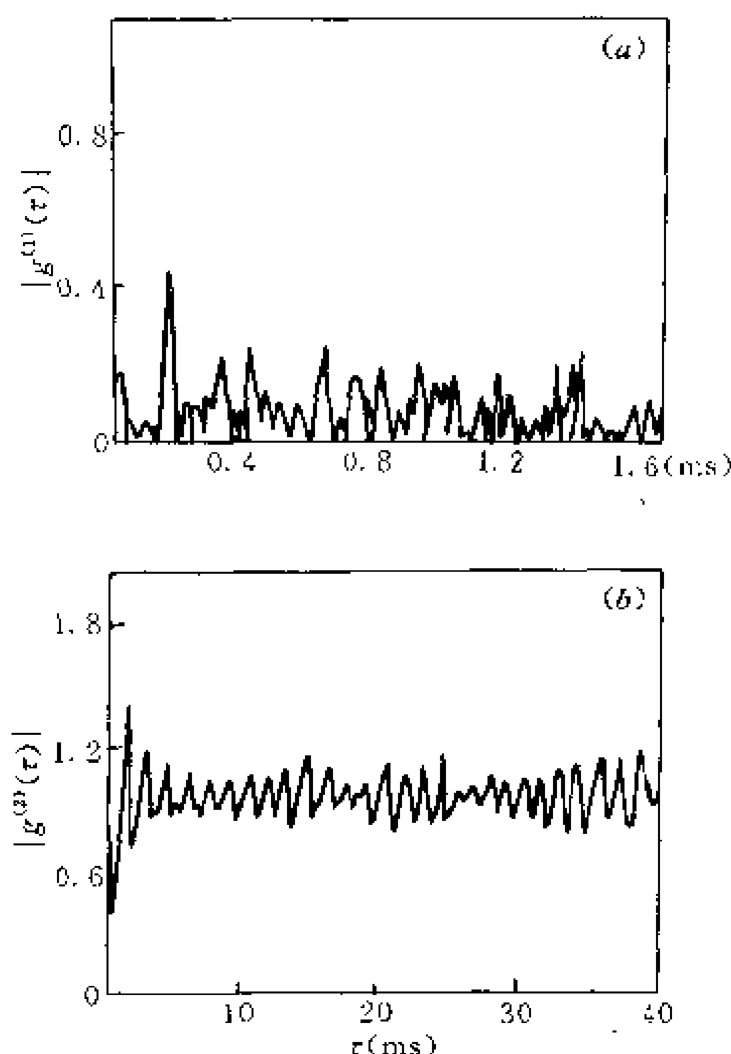


图 5-6-3　激光混沌的一阶相关函数和二阶相关函数

对于激光，$g^{(1)}(\tau)=g^{(2)}(\tau)=1$，表示完全相干。对于激光混沌，$\tau=0$ 时，$g^{(1)}(\tau)=0.8$，$g^{(2)}(\tau)=2.1$，然后衰减；当 τ 很大时，$g^{(1)}(\tau)$也不为零，$g^{(2)}(\tau)$随 τ 增加达到 1。对于黑体辐射，$g^{(1)}(0)=2.0$，$g^{(2)}(0)=1.0$。

§ 5-7 非线性光学现象的混沌

强的激光在非线性光学材料中传播时，引起的非线性光学现象，其耦合波方程组为三个或三个以上的自治微分方程，所以非线性光学现象可能出现混沌。研究较多的是光学混频现象，诸如二次谐波、四波混频、相位共轭波等；还有受激散射现象，诸如受激布里渊散射、受激拉曼散射等。

一、腔内倍频的二次谐波混沌

对于图 5-7-1 所示的 YAG 激光器通过 KTP 晶体腔内倍频的

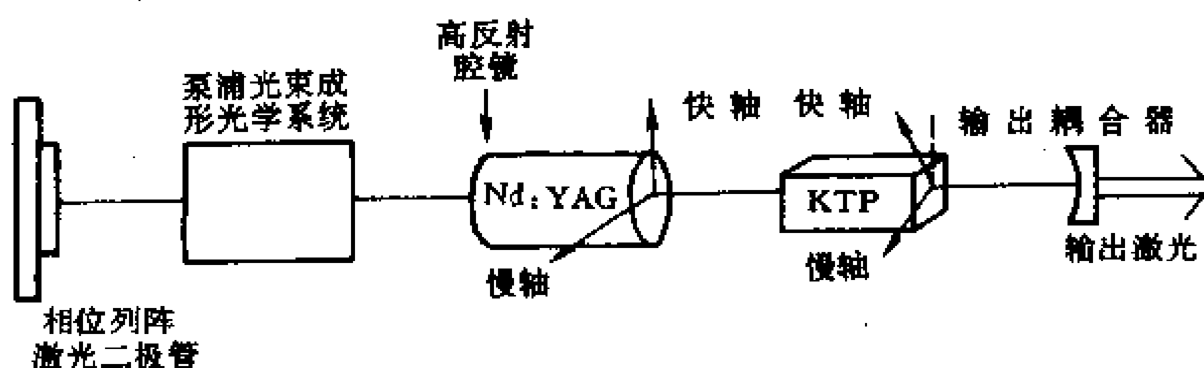


图 5-7-1　腔内倍频 YAG 激光器

不稳定性实验[18]，应考虑 YAG 晶体应力感生的双折射和多重正交的偏振模，对于在一个偏振方向上的几个纵模的光强 I_i 和与之相垂直方向上的 m 个纵模的光强 $I_{\perp i}$ 及其相应的增益 β_i 和 $\beta_{\perp i}$，可列出下列方程：

$$\dot{I}_i = \frac{1}{\tau_c}\{\beta_i - \kappa_i - \xi(\phi)MI_i - 2\xi(\phi)M\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} I_j$$

$$- 2[1-\xi(\phi)]M\sum_{l=1}^{m} I_{\perp l}\}I_i, \quad i = 1,2,\cdots,n \qquad (5\text{-}7\text{-}1)$$

$$\dot{I}_{\perp i} = \frac{1}{\tau_c}\{\beta_{\perp i} - \kappa_{\perp i} - \xi(\phi)MI_{\perp i} - 2\xi(\phi)M\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n} I_{\perp j}$$

$$- 2[1 - \xi(\phi)]M\sum_{l=1}^{n} I_l\}I_{\perp i}, \quad i = 1,2,\cdots,m \qquad (5\text{-}7\text{-}2)$$

$$\dot{\beta}_i = \frac{1}{\tau}\{\beta_i^0 - \beta_i[1 + S_iI_i + \sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n} S_{ij}I_j + \sum_{l=1}^{m} S_{\perp il}I_{\perp l}]\}$$

$$i = 1,2,\cdots,n \qquad (5\text{-}7\text{-}3)$$

$$\dot{\beta}_{\perp i} = \frac{1}{\tau}\{\beta_{\perp i}^0 - \beta_{\perp i}[1 + S_{\perp i}I_{\perp i} + \sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{m} C_{\perp ij}I_{\perp j} + \sum_{l=1}^{n} C_{il}I_l]\}$$

$$i = 1,2,\cdots,m \qquad (5\text{-}7\text{-}4)$$

上式中 κ_i 和 $\kappa_{\perp i}$ 分别表示偏振方向互相垂直的第 i 个模的腔内损耗，$\beta_i^{(0)}$ 和 $\beta_{\perp i}^{(0)}$ 表示它们的小信号增益，τ_c 和 τ 分别表示光在腔内往返时间和自发发光时间，$\xi(\phi)$ 表示与在 YAG 晶体和 KTP 晶体的快轴之间夹角 ϕ 以及 YAG 和 KTP 晶体中双折射位相延迟有关的参数，M 是与产生二次谐波的晶体性质有关的参数，S_i、$S_{\perp i}$、S_{ij}、$S_{\perp ij}$、C_{ij}、$C_{\perp ij}$ 是自饱和参数和交叉饱和参数。对上述方程进行稳定性分析，可以得到腔内倍频二次谐波的稳定输出所对应的 ϕ 角范围。在实验过程中不断改变 YAG 与 KTP 晶轴之间的夹角 ϕ，当 ϕ 在 0°—80°之间时，观测到稳定的二次谐波，然后随 ϕ 增加到 82°时为周期性运动，此后二次谐波进入混沌，直到 163°又恢复为周期运动。整个过程的二次谐波时间波形如图 5-7-2 所示。

二、受激喇曼散射混沌

根据非线性光学，在受激喇曼散射过程中反斯托克斯光的电场振幅 E_1、泵浦光的电场振幅 E_2 和斯托克光的电场振幅 E_3 之间的耦合波方程为

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = -\sigma_1 E_1 - g_1[|E_2|^2 E_1 + E_2^2 E_3^*] \qquad (5\text{-}7\text{-}5)$$

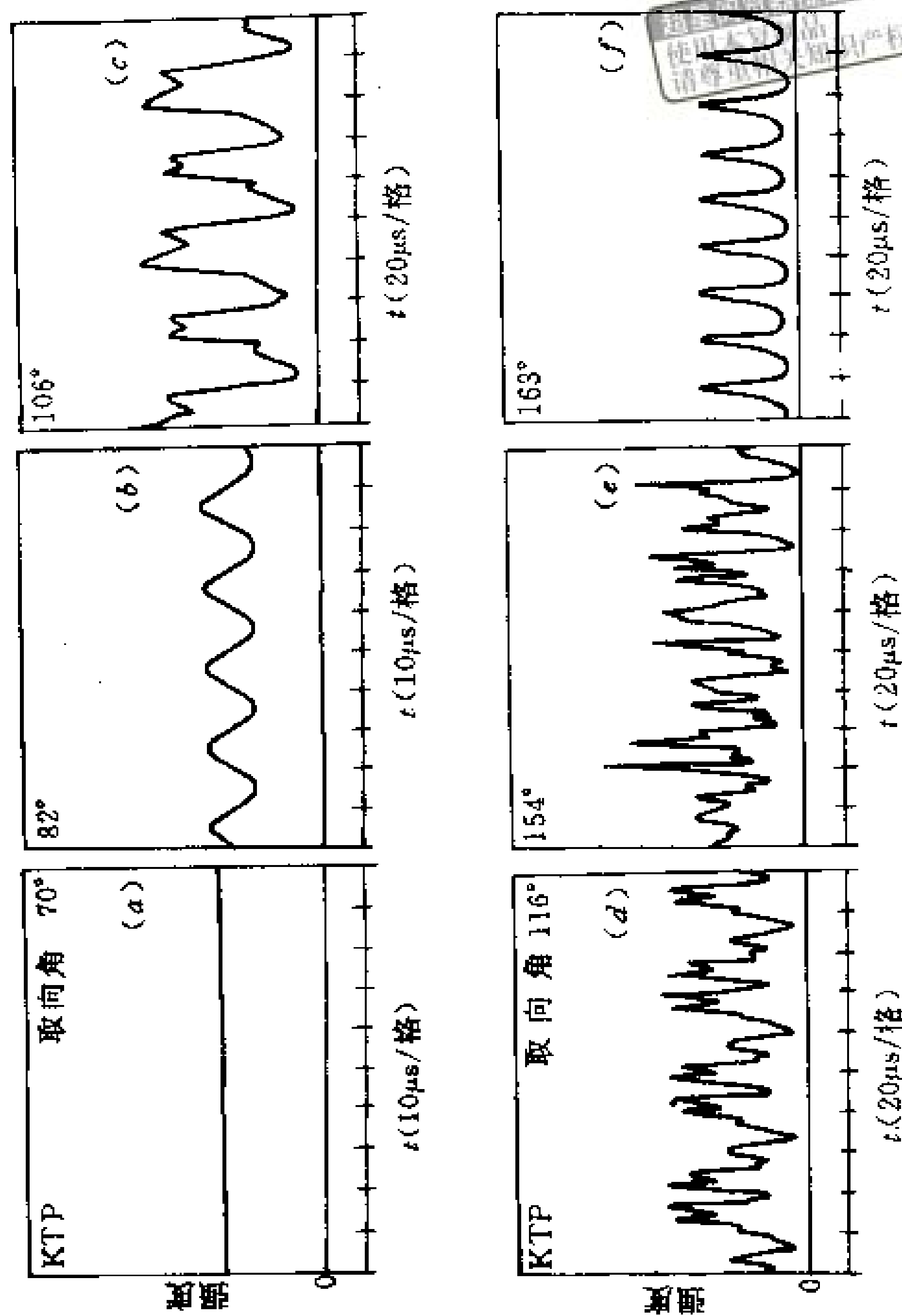


图 5-7-2 腔内倍频光混沌

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = -\sigma_2 E_2 + g_2[|E_1|^2 - |E_3|^2]E_2 \qquad (5\text{-}7\text{-}6)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial t} = -\sigma_3 E_3 + g_3[|E_2|^2 E_3 + E_2^2 E_1^*] \qquad (5\text{-}7\text{-}7)$$

上式假设了这些光的位相完全匹配，σ_i 表示损耗系数，g_i 是包括喇曼截面的模耦合系数。可以将这些方程化为三级自治微分方程，引入

$$E_i = \mathscr{E}_i(x)e^{i\phi_i(x)}, \qquad i = 1,2,3 \qquad (5\text{-}7\text{-}8)$$

将它代入(5-7-5)—(5-7-7)式，并设在 $x=0$ 的入射平面处，$2\phi_2-\phi_3-\phi_1=0$，则得到

$$\frac{\partial \mathscr{E}_1}{\partial t} = -\sigma_1\mathscr{E}_1 - g_1(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_3)\mathscr{E}_2^2 \qquad (5\text{-}7\text{-}9)$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}_2}{\partial t} = -\sigma_2\mathscr{E}_2 + g_2(\mathscr{E}_1^2 - \mathscr{E}_3^2)\mathscr{E}_3 \qquad (5\text{-}7\text{-}10)$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}_3}{\partial t} = -\sigma_3\mathscr{E}_3 + g_3(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_3)\mathscr{E}_2^2 \qquad (5\text{-}7\text{-}11)$$

根据§5-2 的分析，由上述自治方程描写的系统，在适当条件下，将进入混沌。取一组具体的系数参数 σ_i 和 g_i 值，进行数值计算分析，将会得到混沌。图 5-7-3 就是在一组具体的 σ_i 和 g_i 值情形下，泵浦光场 $\mathscr{E}_2$ 随 x 变化的情形，相应的功率谱如图 5-7-4 所示，看上去进入混沌。

在受激散射光混沌方面，已经在光纤中观察到受激布里渊散射混沌[19]。实验用 SiO_2 光纤，长 200m，直径 4.8pm，使用法拉第光学绝缘器，其后向受激散射和透射的泵浦光，在适当条件下进入混沌。

要指出的是，不仅是光学双稳态系统、激光器和非线性光学系统可以发展为混沌；其它的光学系统，例如带有适当反馈回环的布拉格声光衍射，在适当条件下也可以进入混沌。可见，对于光学系统来说，光学混沌是较普遍的现象。

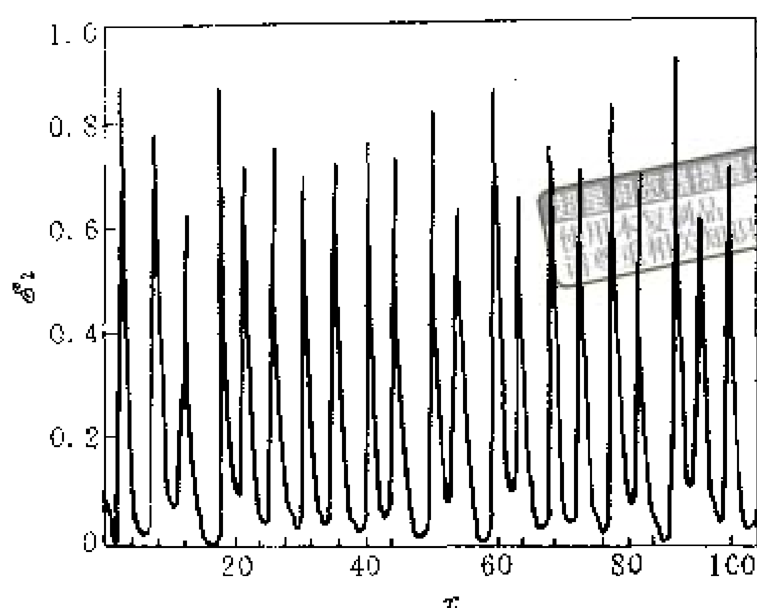


图 5-7-3 受激喇曼散射混沌

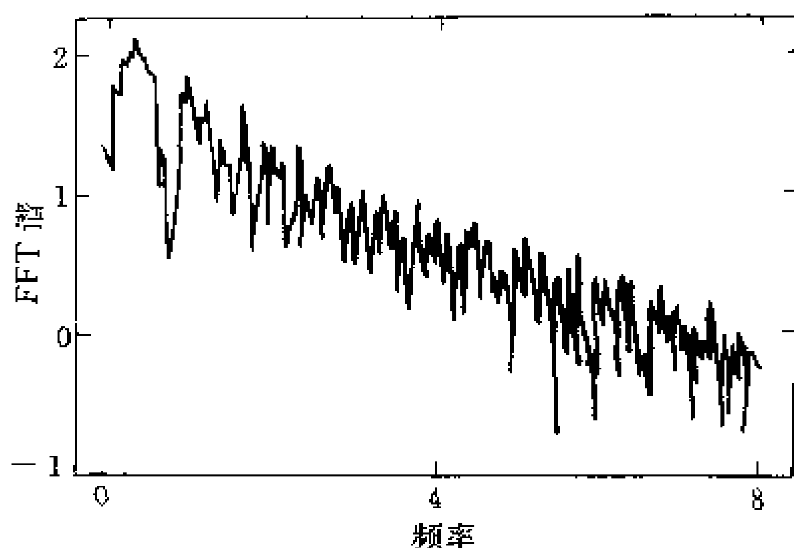


图 5-7-4 功率谱

§ 5-8 倍周期分岔光学系统在分岔状态下对弱信号的放大作用

非线性动力学系统在分岔点之前将以频率 f 作简谐振动，分岔后系统将 $f/2$ 频率运动。假设把它的参数恰好调节在刚要发生

周期加倍分岔之前，此时若耦合入一个频率 $f/2$ 或接近 $f/2$ 的弱的单色信号或扰动，这个弱信号将同系统产生强烈的耦合作用，结果将在系统的输出中有频率为 $f/2$ 的较大分量。随着接近分岔点，这个放大的值将有明鲜的增长。所以对于接近于发生周期加倍分岔的任何动力学系统，可用来放大频率为基频的一半的微弱的相干扰动[20,21]。显然，这样的弱信号探测是相当灵敏的。

现以损耗调制的 CO_2 激光器为例，通过计算机数值模拟来讨论这个问题[22]。这一问题的方程为(5-6-6)(5-6-7)和(5-6-8)式，若令 $Y=10^{-5}GD, X=10^{-5}G\phi, T=10^{+5}t$，取 $RG=2.0\times10^{11}, \gamma_{\parallel}=10^4$ 则可将(5-6-6)—(5-6-8)式变为

$$\frac{dY}{dT}=20-YX-\frac{Y}{10} \tag{5-68-1}$$

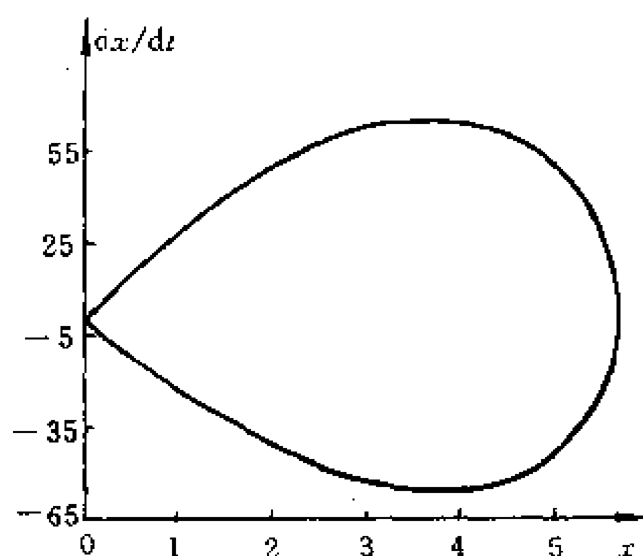
$$\frac{dX}{dT}=2YX-70(1+M\cos\Omega T) \tag{5-8-2}$$

若取 $f=60kHz$，则 $\Omega=2\pi\times0.6$，当 $M=M_c=0.150$ 时，对上二式数值计算得到系统发生由周期 1 运动[图 5-8-1(a)]到周期 2 运动[图 5-8-1(b)]的分岔。可见取 $M=0.148$，则稍小于 M_c，系统处于临近分岔点前的状态。若此时对泵浦项进行调制：

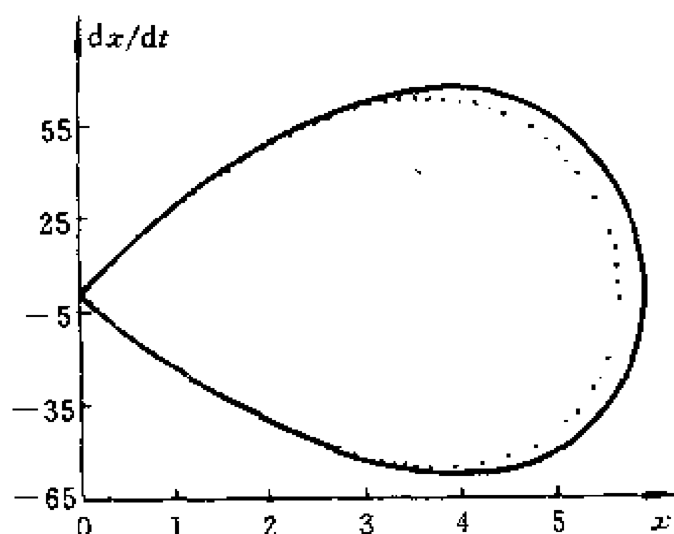
$$R=R_0[1+\varepsilon\cos(2\pi\times0.3+2\pi\delta)T \tag{5-8-3}$$

这相当于给系统引进振幅为 εR_0、频率为 $f_i=0.6/2+\delta$ 的弱信号，ε 和 δ 都是小量。

现在进行数值计算，若用 $\tilde{X}(T)$ 表示引进弱信号后的 $X(T)$，当取 $R_0=20, \varepsilon=0.01$ 时，首先计算 $x(T)=\tilde{X}(T)-X(T)$ 与 T 的关系曲线，结果如图 5-8-2(a)、图 5-8-2(b)和图 5-8-2(c)所示。由图看出，曲线具有拍频特性，拍频为 $\delta=f_i-0.6/2$，这表明外来的弱信号同系统产生耦合作用。当 $\delta=0$ 时，系统作二倍周期运动，频率为 0.6/2，如图 5-8-2(d)所示。其次计算 $\mathrm{Max}[\tilde{X}(T)-X(T)]/\varepsilon$ 与 δ 之间的关系曲线，当 ε 固定时，得到图 5-8-3 的结果，看出得到的曲线，具有共振特性。以上分析表明，一个损耗调制的 CO_2 激光



(a)



(b)

图 5-8-1　CO_2 激光器的倍周期分岔

(a) $M=0.148$，频率为 0.6 的极限环；　(b) $M=0.152$，频率为 0.3 的极限环

器在分岔前，若以频率 f 运动，则对外来的频率为 $f/2$ 或接近 $f/2$ 的弱信号，将可能产生强烈的耦合作用。

实验表明，核磁共振激光器在倍周期分岔状态下，对 $1-10^6$Hz 范围内的弱信号，有明显的放大和探测作用[21]。光学双稳态系统在倍周期分岔状态下，同样应存在放大和探测弱信号的作用[23]。

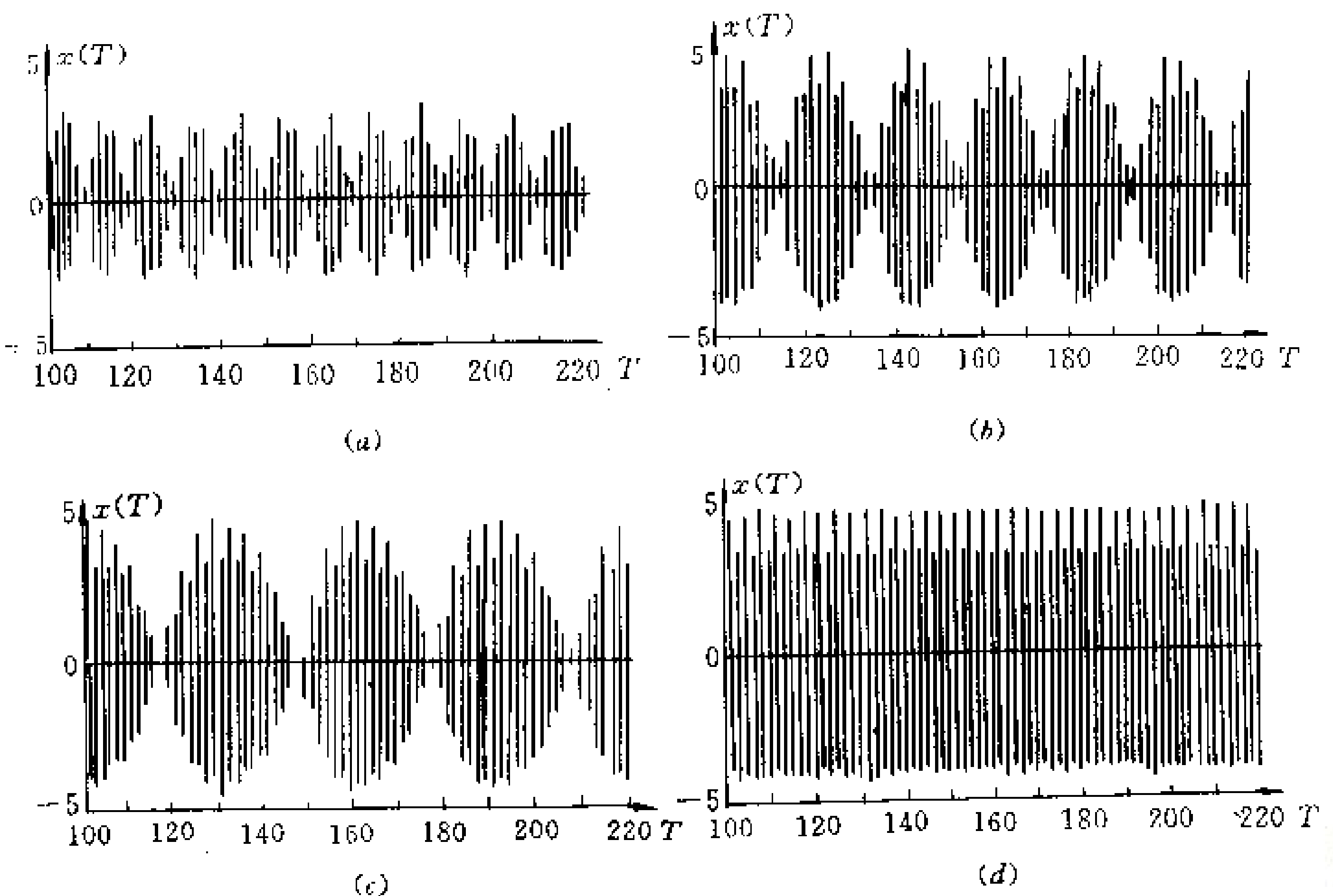


图 5-8-2

(a) $M-0.148, \varepsilon=0.01, \delta-1/20$,拍频为 1/20

(b) $M=0.148, \varepsilon=0.01, \delta=1/40$ 拍频为 1/40

(c) $M=0.148, \varepsilon=0.01, \delta=1/60$,拍频为 1/60

(d) $M=0.148, \varepsilon=0.01, \delta=0$,频率为 0.6/2

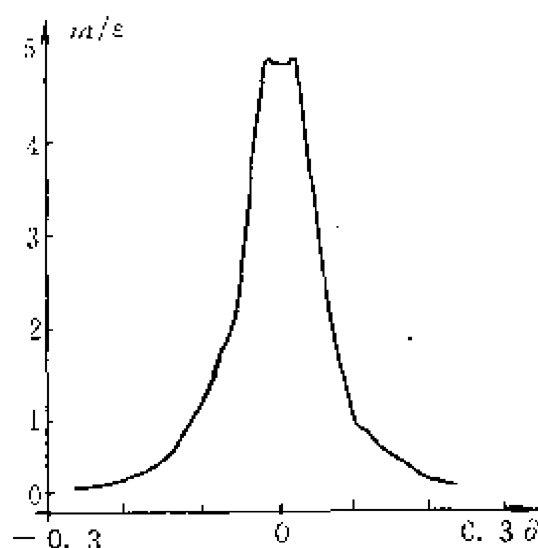


图 5-8-3　$M=0.148$　　$\varepsilon=0.01$

此外，非线性光学系统在倍周期分岔状态下，具有存储信息功能，已经在电光混合延迟反馈光学双稳态系统中，以种子信号预先埋入系统的方法，进行动力学存储，以系统分岔方波的高次谐频的不同振荡模，作为存储状态，分别在 3，5，7，9，…，21 次谐频上实现编码[24,25]。

上面讨论了光学混沌的一些应用原理，实际上，光学混沌在智能光计算和安全通讯等方面，有很大的应用潜力。

参考文献

[1] 郝柏林．物理学进展，第 3 卷，1983，330
[2] 朱照宣．力学进展，第 14 卷，1984，129
[3] Haken. H Phys. Letters, Vol. 53A, 1975, 77
[4] Gibbs H M et al. Phys, Rev. Letters, Vol 46, 1981, 474
[5] Ackerhalt J R et al. Physics Reports, Vol 128, No4 & 5, 1985, 205
[6] Nakatsuka H et al. Phys. Rev. Letters, Vol 50, 1983, 109

[7] Chrostowski J et al. Can. J. Phys, Vol 61, 1983, 1143
[8] Vallee R et al. Phys. Rev. A. Vol 30, 1984, 336
[9] Weiss C O et al. Opt. Comm, Vol 52, 1985, 405
[10] Casperson Lee W. J.O.S.A,B,Vol 12, 1985,993
[11] 沈 柯. 激光原理教程. 北京工业学院出版社出版, 1986, 第九章
[12] Arecchi F T et al. Phys. Rev. Letters, Vol 49, 1982, 1217
[13] Midavaine M et al. Phys. Rev. Letters, Vol 55, 1985, 1989
[14] Müller R and Glas P. J.O.S.A, B, Vol 12, 1985. 84
[15] Mukai, T. and K. otsupca. Phys. Rev. Letters. Vol 55, 1985. 17711.
[16] Weiss C O et al. Phys. Rev. A. Vol 28, 1983, 892
[17] Gioggia R S and Abraham N B. Phys. Rev. Lettrs, Vol 51. 1983, 650
[18] James G E et al. Nonlinear Dynamics in Optical Systems, Technical Digest, 1990,238
[19] Harrison R G et al. Nonlinear Dynamics in Optical systems, Technical Digest, 1990, 433
[20] Wiesenfeld K and Mc Namara B. Phys. Rev. Letters, Vol 55,1985, 13
[21] Derighetti B et al. Phys, Rev. Letters, Vol 55, 1985, 1746.
[22] 冯喜东,沈 柯. 应用光学国家重点实验室年报,1990,109
[23] Li Yonda, Shen Ke, Huang Lique, Guo WenXuan. SPIE, Vol 2039 (《Chaos in Optics》), 1993,263
[24] Tahito Aida and Peter Davis. Japanese Journal of Appl. Phys, Vol 29, 1990, 1241
[25] Tahito Aida and Peter Davis. IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol 28, 1992, 686

第六章　光学压缩态

本章首先讨论光的相干态、最小测不准态和光子统计分布中的一些基本概念，然后讨论光学压缩态的性质和光学压缩态的产生。

§6-1　引　　言

光学压缩态是光学学科中近年来引人注目的前沿课题，自从本世纪八十年代中期在实验上有所突破后，这方面的研究日趋活跃。压缩态的光在超精密测量、光通讯等工程技术领域，有着巨大的应用潜力，所以这是光学科学中的高技术生长点。

为了从物理上理解光学压缩态，首先要讨论一些基本概念，包括光的相干态、最小测不准态、光子的泊松分布、亚泊松分布、超泊松分布等。在此基础上，研究光学压缩态的基本特性。

光学压缩态最早的实验报导是在1985年，斯鲁歇尔(R. E. Slusher)等人在非简并四波混频中观察到7%压缩量的压缩态光[1]，1986年在参量下转换实验中人们观察到63%压缩量的压缩态光[2]，由此，关于光学压缩态的实验，已经是多种多样。本章主要侧重基础方面，着重讨论光学压缩态的基本性质，并以光学压缩态的原始实验为例，分析研究光学压缩态的产生。

§ 6-2 光的相干态

研究相干态先从光的相干性讨论起。根据经典理论，光的电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$通常可以用两个复数共轭项之和表示：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t) \tag{6-2-1}$$

上式中 $\boldsymbol{E}^{(+)}$称为光场的正频项，$\boldsymbol{E}^{(-)}$称为光场的负频项，显然有

$$\boldsymbol{E}^{(-)}=(\boldsymbol{E}^{(+)})^{*} \tag{6-2-2}$$

而且 $\boldsymbol{E}^{(+)}$可向模函数 $\boldsymbol{u}_l$ 的集合展开，若问题的麦克斯韦方程是齐次的，则

$$\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)=\sum_l \mathscr{E}_l\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l t} \tag{6-2-3}$$

空间两点$(\boldsymbol{r}_1,t_1)$、$(\boldsymbol{r}_2,t_2)$处光的相干性，主要用一阶相关函数 $g^{(1)}(r_1,t,r_2,t_2)$和二阶相关函数 $g^{(2)}(r_1,t_1,r_2,t_2;r'_1,t_1,r'_2,t_2)$描写。按照经典理论，光场的一阶相关函数为

$$g^{(1)}(\boldsymbol{r}t,\boldsymbol{r}'t')=\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r},t)E^{(+)}(\boldsymbol{r}',t')\rangle \tag{6-2-4}$$

二阶相关函数描写光的强度干涉，经典表示式为

$$\begin{aligned}&g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1t_1,\boldsymbol{r}_2t_2,\boldsymbol{r}'_1t'_1,\boldsymbol{r}'_2t_2)\\&=\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\end{aligned} \tag{6-2-5}$$

以上两式中的，$\langle\quad\rangle$表示对系统求平均。

从量子理论来看，同样是用场的相关函数描述光场的相干性，用乘密度矩阵求迹的方法求平均值，这时 $\boldsymbol{E}^{(+)}$和 $\boldsymbol{E}^{(-)}$为作用于函数上的算符，它们互为共轭。根据第一章第七节的结果，光的电磁场可用矢势算符 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 表示，矢势 $\boldsymbol{A}$ 可以向模函数 $u_l(\boldsymbol{r})$展开：

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t)=\sum_l\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0V}}\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r})\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_lr}\hat{b}_l(t)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_lr}\hat{b}_l^{+}(t)\right] \tag{1-7-39}$$

相应的，光的电场算符为

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{i}\sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r})[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l r}\hat{b}_l(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l r}\hat{b}_l^\dagger(t)] \tag{1-7-40}$$

上式中的 $\hat{b}_l \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l t}$，$\hat{b}_l^\dagger \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l t}$，算符 $\hat{b}_l$ 和 $\hat{b}_l^\dagger$ 满足(1-7-31)—(1-7-33)式表示的对易关系。若用 $|0\rangle$ 表示光场的基态，则有

$$\hat{b}_l|0\rangle = 0 \tag{6-2-6}$$

上式中 $|0\rangle$ 是光子数 n_l 为 0 的态。$\hat{b}_l$ 是光子的湮没算符，由此给出的真空态的定义，表示没有光子可供湮没。按(1-7-40)式可将 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ 分为正频部分 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)$ 和负频部分 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)$：

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}t) = \mathrm{i}\sum_l \left(\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\hat{b}_l\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_l r-\omega_l t)} \tag{6-2-7}$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t) = -\mathrm{i}\sum_l \left(\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\hat{b}_l^\dagger\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_l r-\omega_l t)} \tag{6-2-8}$$

可见 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}$ 是 $\hat{b}_l$ 的线性组合，$\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}$ 是 $\hat{b}_l^\dagger$ 的线性组合，所以光的电场算符是湮没算符 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}$ 与产生算符 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}$ 之和，而且 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}$ 与 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}$ 互为厄米共轭算符。这样，在量子理论，光场的一阶相关函数表示为

$$g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1 t_1, \boldsymbol{r}_2 t_2) = T_r\{\rho\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\} \tag{6-2-9}$$

上式中 ρ 为密度矩阵，如用 x_1 和 x_2 分别代表 (r_1,t_1) 和 (r_2,t_2)，则上式为

$$g^{(1)}(x_1,x_2) = T_r\{\rho\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(x_1)\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(x_2)\} \tag{6-2-10}$$

根据物理光学，$g^{(1)}(x_1,x_1)$ 和 $g^{(1)}(x_2,x_2)$ 分别表示在 x_1 和 x_2 处的光强度，并有史瓦兹不等式成立：

$$g^{(1)}(x_1,x_1)g^{(1)}(x_2,x_2) \geqslant |g^{(1)}(x_1,x_2)|^2 \tag{6-2-11}$$

它的物理意义是双光束干涉的条纹能见度小于或等于 1。对于完全相干的光，$g^{(1)}(x_1,x_2)$ 可以进行因式分解，即可以表示为 x_1 和 x_2 的光的电场乘积 $\mathscr{E}(x_1)\mathscr{E}(x_2)$：

$$g^{(1)}(x_1,x_2) = \mathscr{E}^*(x_1)\mathscr{E}(x_2) \tag{6-2-12}$$

上式中 $\mathscr{E}(x_1)$ 和 $\mathscr{E}(x_2)$ 分别是光场的正频解和负频解。显然这时(6-2-11)式中取等号，因此干涉条纹的能见度最大。

现在研究构成满足完全相干性条件的光场的态。引用$|\rangle$表示纯态，则密度矩阵为

$$\rho = |\rangle\langle| \tag{6-2-13}$$

一阶相关函数可表示为

$$g^{(1)}(x_1,x_2) = \langle|\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(x_1)\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(x_2)|\rangle \tag{6-2-14}$$

为将上式成为因式分解的形式(6-2-12)式，则未知态$|\rangle$应满足条件

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)|\rangle = \mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)|\rangle \tag{6-2-15}$$

和

$$\langle|\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t) = \mathscr{E}^*(\boldsymbol{r},t)\langle| \tag{6-2-16}$$

根据(6-2-7)式，要使$\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}$和$\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}$不只是算符，而且还具有确定的数值，则要求$\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}$为本征的态，即对第$l$个模式单独定义一个态$|\beta_l\rangle_l$，它具有如下性质：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}|\beta_l\rangle_l &= \mathrm{i}\left(\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\hat{b}_l|\beta_l\rangle_l \\ &= \mathrm{i}\left(\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\beta_l|\beta_l\rangle_l\end{aligned} \tag{6-2-17}$$

考虑到(6-2-7)式中的模函数$u_l(\boldsymbol{r})$可构成一个正交组，由(6-2-17)式得到

$$\hat{b}_l|\beta_l\rangle_l = \beta_l|\beta_l\rangle_l \tag{6-2-18}$$

使用$|\beta_l\rangle_l$的乘积构成下列的态：

$$|\{\beta_l\}\rangle = \prod_l|\beta_l\rangle_l \tag{6-2-19}$$

状态$|\{\beta_l\}\rangle$满足(6-2-18)式，所以服从相干性条件，称此为光场的相干态。下面讨论任意一个单模的光场，则去掉指标l，变为求满足下式的态$|\beta\rangle$：

$$\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \tag{6-2-20}$$

可以看出，$\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}$表征量子化的光场，而由(6-2-17)式$\mathrm{i}(\hbar\omega_l/2\varepsilon_0 V)^{1/2}\beta_l$可视为$\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}$的本征值，所以上式可以看作为经典场与量子化的光场之间的纽带。

现在求在光子数 n 表象中相干态 $|\beta\rangle$ 的表示式。将 $|\beta\rangle$ 向 $|n\rangle$ 展开，得到

$$|\beta\rangle = \sum_{n=0,1,\cdots} M_n|n\rangle \tag{6-2-21}$$

上式中 M_n 为展开系数。因为

$$\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle = \beta\sum M_n|n\rangle \tag{6-2-22}$$

同时

$$\hat{b}|\beta\rangle = \sum M_n\hat{b}|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} M_n\sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{6-2-23}$$

由以上二式对等，得到

$$\begin{aligned}&\beta(M_0|0\rangle + M_1|1\rangle + \cdots)\\&\quad = M_1|0\rangle + M_2\sqrt{2}\,|1\rangle + M_3\sqrt{3}\,|2\rangle + \cdots\end{aligned} \tag{6-2-24}$$

于是得到递推关系

$$M_n = \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}M_0 \tag{6-2-25}$$

代回(6-2-21)式，得到

$$|\beta\rangle = M_0\sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{6-2-26}$$

由规格化条件定系数 M_0：

$$\begin{aligned}\langle\beta|\beta\rangle &= |M_0|^2\sum_n\sum_m \frac{\beta^n\beta^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}\delta_{nm}\\&= |M_0|^2\sum_n\frac{(|\beta|^2)^n}{n!} = |M_0|^2 e^{|\beta|^2} = 1\end{aligned} \tag{6-2-27}$$

求出

$$M_0 = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \tag{6-2-28}$$

代回(6-2-26)式，最后最到相干态向 $|n\rangle$ 展开的表示式

$$|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}\sum_n\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{6-2-29}$$

上式表明$|n=0\rangle$的态与$|\beta=0\rangle$的态相同，所以模的基态是一个相干态。

下面对相干态的性质进行一些讨论。首先求相干态对时间的关系，因为相干态随时间的变化为

$$|\beta,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\beta\rangle$$

辐射场的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \sum_l \omega_l \hat{b}_l^+ \hat{b}_l$$

代入上式，对于单模情形得到：

$$\begin{aligned}|\beta,t\rangle &= e^{-i\hat{b}^+\hat{b}\omega t}e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}\sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= |\beta e^{-i\omega t}\rangle \qquad (6\text{-}2\text{-}30)\end{aligned}$$

所以振幅$\beta(t)=\beta e^{-i\omega t}$在复平面上是一个圆，在实轴和虚轴上的投影为简谐运动；而且一个相干态在任何时刻都保持为相干态。

其次讨论相干态(6-2-29)式的完备性和正交性。容易证明$|\beta\rangle$具有完备性：

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi}|\beta\rangle\langle\beta| = 1 \qquad (6\text{-}2\text{-}31)$$

但相干态(6-2-29)式不正交，因为任何两个相干态$|\alpha\rangle$和$|\beta\rangle$的标量积为

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{[\alpha^*\beta - \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}]} \qquad (6\text{-}2\text{-}32)$$

$$\begin{aligned}|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 &= |e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}\sum_n\sum_m \frac{\alpha^{*n}\beta^m}{\sqrt{n!m!}}\langle n|m\rangle|^2 \\ &= e^{-|\alpha|^2-|\beta|^2+\alpha^*\beta+\alpha\beta^*} \\ &= e^{-|\alpha-\beta|^2} \qquad (6\text{-}2\text{-}33)\end{aligned}$$

它们不可能为0。

我们再从另一个方面讨论相干态，将会看到，实际上，相干态就是谐振子基态经过平移之后的态。为此，引进位移算符$D(\beta)$，它对算符$\hat{b}$实现如下的平移

$$D^{-1}(\beta)\hat{b}D(\beta) = \hat{b} + \beta \tag{6-2-34}$$

所以

$$\begin{aligned} D^{-1}(\beta)\hat{b}|\beta\rangle &= D^{-1}(\beta)\hat{b}D(\beta)D^{-1}(\beta)|\beta\rangle \\ &= (\hat{b} + \beta)D^{-1}(\beta)|\beta\rangle \\ &= \hat{b}D^{-1}(\beta)|\beta\rangle + \beta D^{-1}(\beta)|\beta\rangle \end{aligned} \tag{6-2-35}$$

由此得到

$$\beta D^{-1}(\beta)|\beta\rangle = 0 \tag{6-2-36}$$

也就是

$$D^{-1}(\beta)|\beta\rangle = 0 \tag{6-2-37}$$

由于场振子的基态是上式的唯一的解，所以有

$$D^{-1}(\beta)|\beta\rangle = |0\rangle \tag{6-2-38}$$

由此得到

$$|\beta\rangle = D(\beta)|0\rangle \tag{6-2-39}$$

可见，相干态$|\beta\rangle$就是场振子基态被平移之后得到的态。

此外，由(6-2-34)式，相应地有

$$D^{-1}(\beta)\hat{b}^+ D(\beta) = \hat{b}^+ + \beta \tag{6-2-40}$$

由(6-2-34)和(6-2-40)式，得到位移算符为

$$D(\beta) = \mathrm{e}^{(\beta\hat{b}^+ - \beta^*\hat{b})} \tag{6-2-41}$$

而且具有么正性。

光场的相干态的数目与麦克斯韦方程经典解的数目相等，这是因为由(6-2-17)式看出，对于任何一个序列$\{\beta_i\}$和对于任何一个本征值函数$\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)$，都可以构成光场的一个相干态，所以光场的相干态与麦克斯韦方程的正频解一一对应，二者数目相等。

最后讨论密度矩阵算符的表示式。由于单位算符的相干态展开为对角形式，表明密度矩阵算符ρ存在下列形式的表示式

$$\rho = \int P(\beta)|\beta\rangle\langle\beta|\mathrm{d}^2\beta \tag{6-2-41}$$

为保证展开式的厄米性，上式中$P(\beta)$应为实函数，而且满足归一

化条件。称(6-2-41)式为 P 表示。由上式看出 $P(\beta)$有几率性质，但由于$|\beta\rangle$不能构成正交集，所以 $P(\beta)$不是严格意义下的几率密度。对于按如下定义的按正规排列的密度矩阵特征函数：

$$L_N(s) = T_r\{\rho\exp(s\hat{b}^+)\exp(-s^*\hat{b})\} \tag{6-2-42}$$

求它的 $P(\beta)$表示式，上式中 s 为一复变数，将(6-2-41)式代入，得到

$$L_N(s) = \int P(\beta)\langle\beta|\exp(s\hat{b}^+)\exp(-s^*\hat{b})|\beta\rangle \mathrm{d}^2\beta$$

$$= \int P(\beta)\exp[s\beta^* - s^*\beta)]\mathrm{d}^2\beta \tag{6-2-43}$$

求出上式的反变换式为

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi}\int\exp[\beta s^* - \beta^* s)]L_N(s)\mathrm{d}^2 s \tag{6-2-44}$$

这就是这个问题的 $P(\beta)$的表示式。由上式看出，若 $L_N(s)$是平方可积的，可以证明 $P(\beta)$也是平方可积的，但是 $L_N(s)$不是平方可积的情形，也是存在的。

§6-3　最小测不准态

根据量子力学中的测不准原理，光场的动量和坐标的测不准关系为

$$(\Delta p)^2(\Delta q)^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{4} \tag{6-3-1}$$

上式中$(\Delta p)^2$ 和$(\Delta q)^2$ 分别为光场的动量和坐标的方差

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 \tag{6-3-2}$$

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2 \tag{6-3-3}$$

上式$\langle p\rangle$和$\langle q\rangle$是动量和坐标的平均值。(6-3-1)式中等号成立的态称为最小测不准态。

实际上，相干态就是最小测不准态。为证明这一点，先来求相

干态在坐标和动量空间的波函数。根据第一章第七节，光子的湮没和产生算符与动量和坐标算符之间的关系如(1-7-24)和(1-7-25)式所示，由(1-7-24)式直接得到

$$\hat{b}|\beta\rangle = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}(\omega\hat{q} + i\hat{p})|\beta\rangle$$

$$= \beta|\beta\rangle \tag{6-3-4}$$

先讨论在坐标空间的波函数，因为$\langle q|\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle q|$，则(6-3-4)式对$\langle q|$的乘积为

$$\frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}(\omega\hat{q} + \hbar\frac{\partial}{\partial q})\langle q|\beta\rangle = \beta\langle q|\beta\rangle \tag{6-3-5}$$

由上式得到

$$\frac{\partial}{\partial q}\langle q|\beta\rangle = -2(\frac{\omega}{2\hbar})^{1/2}[(\frac{\omega}{2\hbar})^{1/2}\hat{q} - \beta]\langle q|\beta\rangle \tag{6-3-6}$$

设

$$\Phi(q) \equiv \langle q|\beta\rangle \tag{6-3-7}$$

则(6-3-6)式为

$$\int\frac{d\Phi(q)}{\Phi(q)} = -2(\frac{\omega}{2\hbar})^{1/2}\int[(\frac{\omega}{2\hbar})^{1/2}q - \beta]dq \tag{6-3-8}$$

由此得到

$$\Phi(q) = Ce^{-[(\frac{\omega}{2\hbar})^{1/2}q-\beta]^2} \tag{6-3-9}$$

由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(q)\Phi(q)dq = 1 \tag{6-3-10}$$

定积分常数C，得到

$$\Phi(q) = (\frac{\omega}{\pi\hbar})^{1/4}e^{-[(\frac{\omega}{2\hbar})^{1/2}q-\beta]^2} \tag{6-3-11}$$

可见，相干态在坐标空间的波函数为高斯型函数，如图 6-3-1 所示。考虑与时间的关系

$$\beta(t) = \beta e^{-i\omega t} \tag{6-3-12}$$

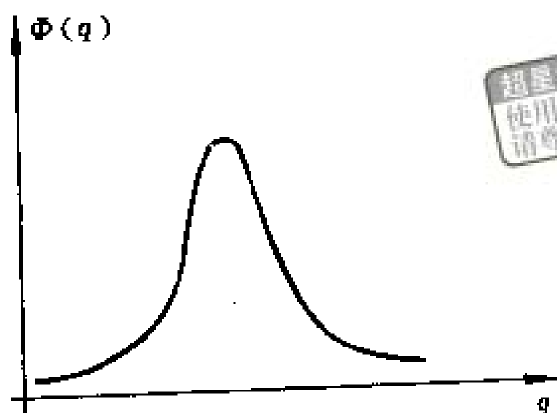


图 6-3-1　相干态波函数

则最后得到坐标空间波函数完整形式为

$$\Phi(q,t)=(\frac{\omega}{\pi\hbar})^{1/4}e^{-[(\frac{\omega}{2\hbar})^{1/2}q-\beta\cos\omega t]^2} \tag{6-3-13}$$

几率为

$$|\Phi(q,t)|^2=(\frac{\omega}{\pi\hbar})^{1/2}e^{-2[(\frac{\omega}{2\hbar})^{1/2}q-\beta\cos\omega t]^2} \tag{6-3-14}$$

使用$\langle p|q=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle p|$，进行同样的讨论，得到动量空间的波函数为：

$$\Phi(p,t)=(\frac{1}{\pi\hbar\omega})^{1/4}e^{-[(\frac{1}{2\hbar\omega})^{1/2}p+\beta\sin\omega t]^2} \tag{6-3-15}$$

几率为

$$|\Phi(q,t)|^2=(\frac{1}{\pi\hbar\omega})^{1/4}e^{-[(\frac{1}{2\hbar\omega})^{1/2}p-\beta\sin\omega t]^2} \tag{6-4-16}$$

可见，相干态的波包是高斯函数型的。

为了表明相干态是最小测不准态，先求出在这些高斯函数范围的波包的坐标和动量平均值和方差。由第一章第七节的(1-7-28)式，得到坐标算符平均值为

$$\langle\hat{q}\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}[\langle\beta|\hat{b}^{+}|\beta\rangle+\langle\beta|\hat{b}|\beta\rangle] \tag{6-3-17}$$

将(6-2-20)式代入，同时考虑到时间依赖关系，则得到

$$\langle\hat{q}\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\beta e^{i\omega t}=\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\beta\cos\omega t \tag{6-3-18}$$

由(6-3-17)式，$\langle\hat{q}^2\rangle$为：

$$\langle\hat{q}^2\rangle=\frac{2\hbar}{\omega}[\langle\beta|\hat{b}^{+}\hat{b}^{+}+\hat{b}^{+}\hat{b}+\hat{b}\hat{b}^{+}+\hat{b}\hat{b}|\beta\rangle]$$

$$=\langle\hat{q}\rangle^2+\frac{\hbar}{2\omega} \tag{6-3-19}$$

由此得到

$$\langle\triangle q\rangle^2=\langle\hat{q}^2\rangle-\langle\hat{q}\rangle^2=\frac{\hbar}{2\omega} \tag{6-3-20}$$

同理，由(1-7-29)式得到动量算符的平均值为

$$\langle\hat{p}\rangle=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}[\langle\beta|\hat{b}^{+}|\beta\rangle-\langle\beta|\hat{b}|\beta\rangle]$$

$$=\sqrt{2\hbar\omega}\,\beta\sin\omega t \tag{6-3-21}$$

由此得到

$$\langle\hat{p}^2\rangle=\langle\hat{p}\rangle^2+\frac{\hbar\omega}{2} \tag{6-3-22}$$

所以

$$\langle\Delta p\rangle^2=\langle\hat{p}^2\rangle-\langle\hat{p}\rangle^2=\frac{\hbar\omega}{2} \tag{6-3-23}$$

最后得到

$$\langle\Delta p\rangle^2\langle\Delta q\rangle^2=\frac{\hbar^2}{4} \tag{6-3-24}$$

所以

$$\langle\Delta p\rangle\langle\Delta q\rangle=\frac{\hbar}{2} \tag{6-3-25}$$

上述结果表明，若光场为相干态光场，在一个相干态中两个正交分量的量子起伏是相等的，并按位相随机分布，这两个正交分量的不准量满足最小测不准关系。相干态已将测不准乘积降到它的

极小值，所以是在量子理论范围内最大限度接近经典的态。相干态的量子起伏等于零点起伏，它构成了信号的噪声极限。所以，就是纯相干态运转的理想激光器输出的激光，也存在量子噪声。

实际上，存在其它的最小测不准态，在这些态中，光场的某一个相分量的量子起伏小于相干态的量子起伏，但以另一个相分量量子起伏增加为代价，这就是下边各节要讨论的压缩态。可见，在光的压缩态中量子噪声不再按位相随机分布，这为实际应用提供了可能性。

除相干态以外，当然还存在其它形式的波包，它们也满足最小测不准条件。这种最小测不准态，人们已经证明过，应满足

$$(p - \langle p \rangle)|\rangle = \mathrm{i}\mu(q - \langle q \rangle)|\rangle \qquad (6\text{-}3\text{-}26)$$

上式中的 μ 可取任意值。当 $\mu = \omega$ 时，上式直接给出 $(\Delta p)^2 = \omega^2(\triangle q)^2$，$|\rangle$是光子湮没算符 $\hat{b} = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} + \mathrm{i}\hat{p})$ 的本征态，即相干态。(6-3-29)式表明，一般来说，$|\rangle$是下列算符 $\hat{B}(\mu)$ 的本征态

$$\hat{B}(\mu) = \left(\frac{1}{2\hbar\omega}\right)^{1/2}(\mu\hat{q} + \mathrm{i}\hat{p})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu\omega}\right)^{1/2}[(\mu + \omega)\hat{b} + (\mu - \omega)\hat{b}^{+}]$$

$$(6\text{-}3\text{-}27)$$

这样可以认为 $\hat{B}(\mu)$ 是频率为 μ 的振子的湮没算符，$|\rangle$则视为频率为 μ 能量为 $\hbar\mu$ 的相干态。求这个态的 $L_N(s)$ 发现，它就不是本章第二节最后提到的那种平方可积情形。

§6-4 光子的泊松分布律

现在讨论相干态的光模式含有 n 个光子的几率，由(6-2-29)式得到

$$|\langle n|\beta\rangle|^2 = \frac{|\beta|^{2n}}{n!}e^{-|\beta|^2} \qquad (6\text{-}4\text{-}1)$$

这时光子的平均数为

$$\langle n\rangle = |\beta|^2 \tag{6-4-2}$$

(6-4-1)式是泊松分布律，如图 6-4-1(a)所示。由激光物理学知道，单模激光的光子数非常接近泊松分布。

由此我们还可以得出模式内光子数颇多的光，其性质接近经典情形的结论。事实上，由本章第二节，经典场展开式为

$$\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{r},t) = \sum_l \mathscr{E}_l \boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega_l t} \tag{6-2-3}$$

而在量子理论中，由(6-2-7)式，光场算符为

$$\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{r},t) = i\sum_l \left(\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \beta_l \boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega_l t} \tag{6-4-3}$$

比较这两种表示式，可以看出经典展开系数 $\mathscr{E}_l$ 与相干态振幅 β_l 之间的对应关系为

$$i\left(\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \beta_l \leftrightarrow \mathscr{E}_l \tag{6-4-4}$$

因为 $\hbar$ 甚小，所以光场的经典极限要求

$$|\beta_l| \gg 1 \tag{6-4-5}$$

由式(6-4-2)式看出，这相当要求光模式内的光子数目颇高，激光就属于这种情形。

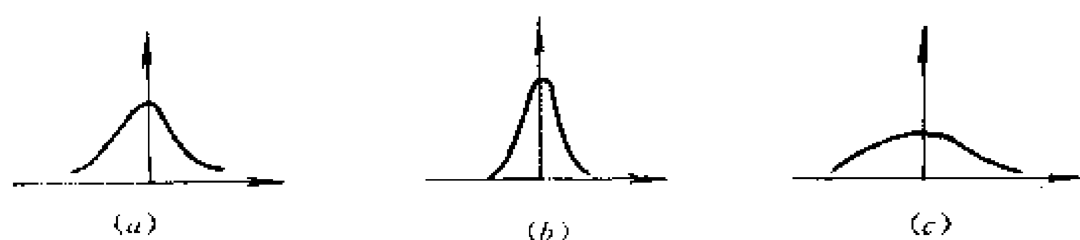


图 6-4-1　光子统计分布律

光子计数法可测量光场中的统计分布，光子数的起伏 $\Delta\bar{n}^2$ 表示这个分布的密度。光子数统计分布情况可用下式表示的二阶相关函数区分

$$g^{(2)}(0) - 1 = \frac{\Delta\bar{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}} \tag{6-4-6}$$

二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$ 表示两个光子同时到达的几率，也称光子聚束。

对于 $g^{(2)}(0)=1$ 的光场，光子统计为泊松分布，例如相干态单模激光即属这种情形，这时光子数的起伏 $\overline{\Delta n^2}=\bar{n}$，光子不聚束。对于 $g^{(2)}(0)>1$ 的光场，表现出超泊松分布，如图 6-4-1(b)所示，热光源的光场属于这种情形，由第三章第三节的讨论知道此时光子聚束。对于 $g^{(2)}(0)<1$ 情形，为亚泊松分布的光场，如图 6-4-1(c)所示。目前已经在共振荧光、负反馈半导体激光器输出的激光和参量下变换过程中，观察到光子的亚泊松分布。在第三章第三节曾指出，此时共振荧光的光子不聚束，这是因为 $g^{(2)}(\tau)$ 描写原子在 t 时发射一个光子，在 $t+\tau$ 时又发射一个光子的几率；对于共振荧光，原子发射一个光子之后，即跃迁回基态，不可能再发射第二个光子，所以 $g^{(2)}(\tau)$ 在 $\tau\to 0$ 时为 0，如第三章的图 3-3-3 所示。

由以上讨论看出，光子数的统计分布律与光子聚束效应之间存在一定关系。同时由(6-4-6)式看出，对于亚泊松分布的光场，它的光子数起伏 $\overline{\Delta n^2}$ 较小，因此使用这样的光场进行精密测量时，可减少光场量子噪声。

§ 6-5　光学压缩态

前面讨论了与光学压缩态有关的一些基本概念，现在讨论光学压缩态，首先讨论物理学中关于压缩态的一般定义，设相互共厄的两个物理量 P 和 Q，它们满足测不准关系

$$\Delta P\Delta Q \geqslant |R| \tag{6-5-1}$$

与对易关系

$$[P,Q] = R \tag{6-5-2}$$

又设 P 和 Q 有相同的量纲，例如光的电场的实部和虚部，则当 ΔP(或 ΔQ)满足下列关系时，称之为压缩态

$$\Delta P^2 < |R| \tag{6-5-3}$$

上式中 ΔP 和 ΔQ 分别是物理量 P 和 Q 的不确定度。

对于一个单色平面光波场，它的电场强度有两个正交分量，它们与时间的关系分别是 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$，所以这两个分量中的任何一个，可作为被压缩量。事实上，一个单模光场可表示为

$$\hat{E}(t) = \xi(\hat{b}e^{-i\omega t} + \hat{b}^{+} e^{i\omega t}) \tag{6-5-4}$$

上式中 ξ 是含有空间坐标的函数，算符 $\hat{b}$ 和 $\hat{b}^{+}$ 分别是光子的湮没和产生算符，服从玻色子算符对易关系，$\hat{b}$ 和 $\hat{b}^{+}$ 可分别表示为

$$\hat{b} = \hat{X}_1 + i\hat{X}_2 \tag{6-5-5}$$

$$\hat{b}^{+} = \hat{X}_1 - i\hat{X}_2 \tag{6-5-6}$$

上式中 $\hat{X}_1$ 和 $\hat{X}_2$ 是厄米算符

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{b}^{+} + \hat{b}) \tag{6-5-7}$$

$$\hat{X}_2 = \frac{i}{2}(\hat{b}^{+} - \hat{b}) \tag{6-5-8}$$

服从下列对易关系

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2} \tag{6-5-9}$$

这样，光的电场可表示为

$$\hat{E}(t) = \frac{\xi}{2}(\hat{X}_1\cos\omega t + \hat{X}_2\sin\omega t) \tag{6-5-10}$$

可见，X_1 和 X_2 可定义为光场正交相分量的振幅。

对于相干态，由(6-5-7)式可以求出 $(\Delta X_1)^2$

$$\begin{aligned}(\Delta X_1)^2 &= \langle\beta|X_1^2 - \langle X_1\rangle^2|\beta\rangle \\ &= \langle\beta|\left(\frac{\hat{b}^{+} + \hat{b}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta^{*} + \beta}{2}\right)^2|\beta\rangle \\ &= \langle\beta|\frac{\hat{b}^{+}\hat{b}^{+} + 2\hat{b}^{+}\hat{b} + \hat{b}\hat{b} + 1}{4} - \frac{(\beta^{*} + \beta)^2}{4}|\beta\rangle \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned} \tag{6-5-11}$$

同理可证

$$(\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4} \tag{6-5-12}$$

所以，对于相干态，仍得到最小测不准态

$$(\Delta X_1)^2(\Delta X_2)^2 = \frac{1}{16} \tag{6-5-13}$$

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4} \tag{6-5-14}$$

若这两个正交相分量有不同的偏差，这种最小测不准态就是压缩态，由此得到单色平面波光场压缩条件为

$$(\Delta X_i)^2 < \frac{1}{4}, \qquad i = 1,2 \tag{6-5-15}$$

画出 X_1 和 X_2 的不确定量在相空间的几何图，可以看出相干态与压缩态之间的区别，图 6-5-1(a)表示相干态情形，两个正交相分量的偏差相等，所以分布是个圆；而压缩态，由于有一个分量偏差变小，分布由圆变成椭圆，如图 6-5-2 所示。

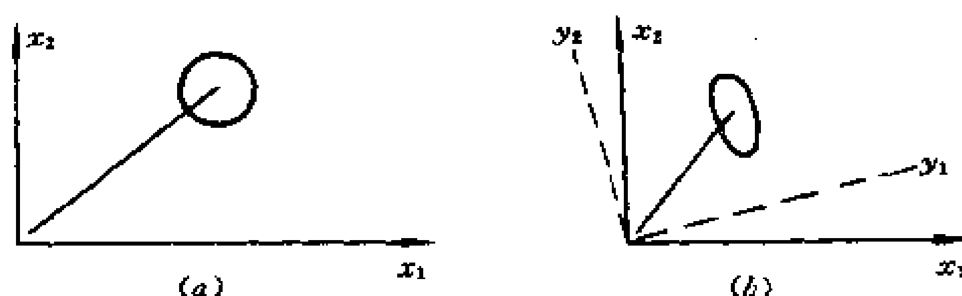


图 6-5-1 (a)相干态 (b)压缩态

上述结果表明，光学压缩态在一个相分量上具有低于极限的噪声；但同时另一个相分量的量子噪声由于测不准关系限制，则增大。光学压缩态允许有大量光子数，所以压缩效应是宏观的量子效应，压缩态的光子服从的分布律可由二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$ 与光子数偏差 $\overline{\Delta n^2}$ 之间关系判断

$$g^{(2)}(0) - 1 = \frac{\overline{\Delta n^2} - \bar{n}}{\bar{n}}$$

例如，若压缩很大，$\overline{\Delta n^2} \to 0$ 时，则光学压缩态的光场的光子可能具

有亚泊松分布。对于压缩态光场，由于不能用经典几率方法处理，压缩态光场是非经典光场。用 P 表示的单模光场的某个相分量的表示式为

$$(\Delta X_i)^2 = \frac{1}{4}\int P(\beta)[(\beta + \beta^*) - (\langle\beta\rangle + \langle\beta\rangle^*)]^2 \mathrm{d}^2\beta + \frac{1}{4} \tag{6-5-16}$$

对于压缩态；$(\Delta X_i)^2 < \frac{1}{4}$，所以 $P(\beta)$ 是一个非正定函数。

下面进一步讨论光学压缩态的性质。对于相干态，曾引进位移算符 $D(\beta)$，它作用在真空态上可以产生一个相干态，如(6-2-39)式所示，$D(\beta)$ 由(6-2-41)式表示。同样，对于光学压缩态可以引入压缩态算符 $S(Z)$

$$S(Z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(Z^*\hat{b}\hat{b} - Z\hat{b}^+\hat{b}^+)} \tag{6-5-17}$$

上式中

$$Z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{6-5-18}$$

压缩算符 $S(Z)$ 和位移算符 $D(\beta)$ 二次作用在真空态上可以产生一个光学压缩态，下面我们就来讨论这些问题。由本章第三节最小测不准态的一般表达式(6-3-27)式定义 $|\beta\rangle_g$

$$\hat{B}|\beta\rangle_g = \beta_g|\beta\rangle_g \tag{6-5-19}$$

若引入么正变换算符 $\hat{S}$ 进行相似变换，可将 $\hat{B}$ 变为 $\hat{b}$

$$\hat{b} = \hat{S}^+\hat{B}\hat{S} \tag{6-5-20}$$

$$\hat{B} = \hat{S}\hat{b}\hat{S}^+ \tag{6-5-21}$$

将(6-5-17)和(6-5-18)式代入，得到

$$\hat{B} = \cosh r\hat{b} + \sinh r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\hat{b}^+ \tag{6-5-22}$$

在得到上式过程中使用了公式

$$\mathrm{e}^M N \mathrm{e}^{-M} = N + [M,N] + \frac{2}{2!}[M,[M,N]] + \cdots \tag{6-5-23}$$

由(6-5-20)式得到

$$\hat{b}\hat{S}^+|\beta\rangle_g = \beta\hat{S}^+|\beta\rangle_g \tag{6-5-24}$$

因为

$$\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$$

比较以上两式，得到

$$|\beta\rangle = \hat{S}^{+}|\beta\rangle_{g} \tag{6-5-25}$$

所以

$$|\beta\rangle_{g} = \hat{S}|\beta\rangle \tag{6-5-26}$$

上式表明，$|\beta\rangle_{g}$ 可通过相似变换与 $\hat{S}$，$|\beta\rangle_{g}$ 联系起来，就是说 $|\beta\rangle_{g}$ 可由真空态 $|0\rangle$ 表示

$$|\beta\rangle_{g} = \hat{S}|\beta\rangle = \hat{S}\hat{D}(\beta)|0\rangle \tag{6-5-27}$$

又根据恒等式

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

上式中 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 是可对易的算符，由(6-2-41)式 $\hat{D}(\beta)$ 可表示为

$$\hat{D}(\beta) = e^{\beta\hat{b}^{+}-\beta^{*}\hat{b}} = e^{\beta\hat{b}^{+}}e^{-\beta^{*}\hat{b}}e^{-\frac{\beta^{2}}{2}} \tag{6-5-28}$$

所以(6-5-27)式还可以表示为

$$|\beta\rangle_{g} = \hat{S}\hat{D}(\beta)\hat{S}^{+}\hat{S}|0\rangle = D(\beta')\hat{S}|0\rangle \tag{6-5-29}$$

上式中的 β' 为

$$\beta' = \cosh r\beta - \sinh r e^{-i\theta}\beta^{*} \tag{6-5-30}$$

$|\beta\rangle_{g}$ 是完备的，因为

$$\frac{1}{\pi}\int|\beta\rangle\langle\beta|d^{2}\beta = \frac{1}{\pi}\int|\beta\rangle_{gg}\langle\beta|d^{2}\beta = 1 \tag{6-5-31}$$

现在讨论 $\hat{S}$ 的意义，若引入一个分量为 Y_1 和 Y_2 的 Y 复平面，它相对于由(6-5-5)和(6-5-6)式引入的 X_1 和 X_2 的 X 复平面有一个转角 $\theta/2$，即

$$Y_1 + iY_2 = (X_1 + iX_2)e^{-i\frac{\theta}{2}} \tag{6-5-32}$$

将算符 $\hat{S}$ 作用于上式，并使用(6-5-29)式，得到

$$\hat{S}(Y_1 + iY_2)\hat{S}^{-1} = Y_1e^{-r} + iY_2e^{r} \tag{6-5-33}$$

上式表明，Y 平面上的分量 Y_1 和 Y_2 经 $\hat{S}$ 作用后，分别被压缩 e^{-r} 和 e^{r} 倍，如图 6-5-1(a)和图 6-5-1(b)所示，称 $\hat{S}$ 为压缩算符，可将

$\hat{D}(\beta)\hat{S}(Z)|0\rangle$记为$|\beta,Z\rangle$，称为压缩态。

下面讨论光学压缩态的量子起伏，具体研究压缩态情形的$(\Delta Y_1)^2$和$(\Delta Y_2)^2$。先求在压缩态情形的$(\Delta X_1)^2$的表示式，由(6-5-7)和(6-5-8)式得到

$$(\Delta X_1)^2=\langle 0|\hat{S}^+(Z)\hat{D}^+(\beta)|X_1^2-\langle X_1\rangle^2|\hat{D}(\beta)\hat{S}(Z)|0\rangle$$

$$=\langle 0|\hat{S}^+(Z)\hat{D}^+(\beta)|(\frac{\hat{b}^++\hat{b}}{2})^2-(\frac{\beta^*+\beta}{2})^2|\hat{D}(\beta)\hat{S}(Z)|0\rangle \tag{6-5-34}$$

根据(6-2-34)式，上式可表示为

$$(\Delta X_1)^2=\langle 0|\hat{S}^+(Z)|(\frac{\hat{b}^++\hat{b}+\beta^*+\beta}{2})^2-(\frac{\beta^*+\beta}{2})^2|\hat{S}(Z)|0\rangle \tag{6-5-35}$$

由式(6-5-32)式，Y_1为

$$Y_1=X_1\cos\frac{\theta}{2}+X_2\sin\frac{\theta}{2} \tag{6-5-36}$$

使用上述结果得到

$$(\Delta Y_1)^2=\langle 0|\hat{S}^+(Z)[(\frac{\hat{b}^++\hat{b}}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\frac{\hat{b}^+-\hat{b}}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$+\frac{\beta^*+\beta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}\frac{\beta^*-\beta}{2}\sin\frac{\theta}{2})^2-(\frac{\beta^*+\beta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$+\mathrm{i}\frac{\beta^*-\beta}{2}\sin\frac{\theta}{2})^2]\hat{S}(Z)|0\rangle$$

$$=\langle 0|(\frac{\hat{b}^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{-r}+\hat{b}^-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{-r}}{2})^2|0\rangle$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2r} \tag{6-5-37}$$

同理得到

$$(\Delta Y_2)^2=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2r} \tag{6-5-38}$$

以上得到的(6-5-37)和(6-5-38)式，是压缩态的另一种表示。

由(6-5-14)式可以看出，对于相干态，量子起伏带来的测量误

差为一圆，而对于压缩态$|\beta,Z\rangle$的情形，则为一个椭圆，由于$Y_1+iY_2=(X_1+iX_2)e^{-i\theta/2}$是一个坐标旋转复振幅，$2(\Delta Y_1)^2$和$2(\Delta Y_2)^2$分别表示量子起伏带来的测量误差椭圆长轴和短轴的大小，如图6-5-1(*a*)和图6-5-1(*b*)所示。再一次表明，压缩态的光场的Y_1或Y_2分量的量子起伏变小，测量精度提高。

$\hat{S}(Z)$作用在状态$|0\rangle$上，可得到压缩的真空态$|0\rangle_g=\hat{S}(Z)|0\rangle$；由(6-5-27)式可知压缩算符$\hat{S}(Z)$和位移算符$D(\beta)$二次作用在真空态上可产生压缩态$|\beta,Z\rangle$。可见，压缩态实质上是在真空态中形成的，光的压缩态的本质是真空态在很强的光场的非线性作用下，性质发生变化的结果。压缩态的光子可以出现聚束或反聚束，当振幅量子起伏减少，光子反聚束；振幅量子起伏增大，光子聚束，这是相干振幅大大超过压缩的极限情况下的结果。一般而言，压缩态与光子聚束或反聚束之间不存在这样的简单关系。

现在讨论光学压缩态的几率密度函数。由(6-5-19)和(6-5-22)式，得到

$$\hat{B}|\beta\rangle_g=(\cosh r\hat{b}+\sinh re^{-i\theta}\hat{b}^+)|\beta\rangle_g=\beta_g|\beta\rangle_g \tag{6-5-39}$$

若令

$$\mu=\cosh r \tag{6-5-40}$$

$$\nu=\sinh re^{-i\theta} \tag{6-5-41}$$

则有

$$\hat{B}=\mu\hat{b}+\nu\hat{b}^+ \tag{6-5-42}$$

$$|\mu|^2-|\nu|^2=1 \tag{6-5-43}$$

由上式得到

$$[\hat{B},\hat{B}^+]=1 \tag{6-5-44}$$

将(6-5-39)式两端作用$\langle\beta|$，得到

$$\langle\beta|\mu\hat{b}|\beta\rangle_g+\nu\langle\beta|\hat{b}^+|\beta\rangle_g=\beta_g\langle\beta|\beta\rangle_g \tag{6-5-45}$$

在$|\beta\rangle_g$表象中上式为[4]

$$\mu\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\partial}{\partial\beta^*}\right)\langle\beta|\beta\rangle_g=(\beta_g-\nu\beta^*)\langle\beta|\beta\rangle_g \quad (6\text{-}5\text{-}46)$$

由上式得到

$$\langle\beta|\beta\rangle_g=\frac{1}{\mu^{1/2}}\mathrm{e}^{\left(-\frac{|\beta|^2}{2}-\frac{|\beta_g|^2}{2}-\frac{\nu}{2\mu}\beta^{*2}+\frac{\nu}{2\mu}\beta_g^{*2}-\frac{\beta^*\beta_g}{\mu}+i\phi_0\right)} \quad (6\text{-}5\text{-}47)$$

上式中 ϕ_0 为实数。若令 $\beta=\beta_1+i\beta_2$，$\mu^*\beta_g-\nu\beta_g^*=\hat{\beta}_{g1}+i\hat{\beta}_{g2}$，则由(6-5-47)式得到

$$|\langle\beta|\beta\rangle_g|^2=\frac{1}{|\mu|}\mathrm{e}^{[-(1-2\alpha_1)(\beta_1-\hat{\beta}_{g1})^2-(1+2\alpha_1)(\beta_2-\hat{\beta}_{g2})^2+4\alpha_2(\beta_1-\hat{\beta}_{g1})(\beta_2-\hat{\beta}_{g2})]} \quad (6\text{-}5\text{-}48)$$

上式中使用了

$$-\frac{\nu}{2\mu}=\alpha_1+i\alpha_2 \quad (6\text{-}5\text{-}49)$$

(6-5-48)式是高斯型几率密度函数，如图 6-5-2 所示。

最后讨论准粒子问题。仿照光子数算符

$$n=\hat{b}^+\hat{b} \quad (6\text{-}5\text{-}50)$$

可以引进准粒子算符

$$n_g=\hat{B}^+\hat{B} \quad (6\text{-}5\text{-}51)$$

这样，可以将 $\hat{B}^+$ 和 $\hat{B}$ 分别看作为准粒子的产生算符和湮没算符。由(6-5-21)式得到

$$n_g=\hat{S}\hat{b}^+\hat{S}^+\hat{S}\hat{b}\hat{S}^+=\hat{S}n\hat{S}^+ \quad (6\text{-}5\text{-}52)$$

由上式得出

$$n=\hat{S}^+n_g\hat{S} \quad (6\text{-}5\text{-}53)$$

以上表示式表示 n 与 n_g 之间的关系。

可以按下列定义引进准粒子态 $|m_g\rangle$

$$n_g|m_g\rangle=m|m_g\rangle \quad (6\text{-}5\text{-}54)$$

$$n_g|0_g\rangle=0 \quad (6\text{-}5\text{-}55)$$

上式中 $|0_g\rangle$ 是准粒子的真空态。与状态 $|n\rangle$ 相类似，可将 $|m_g\rangle$ 表示为

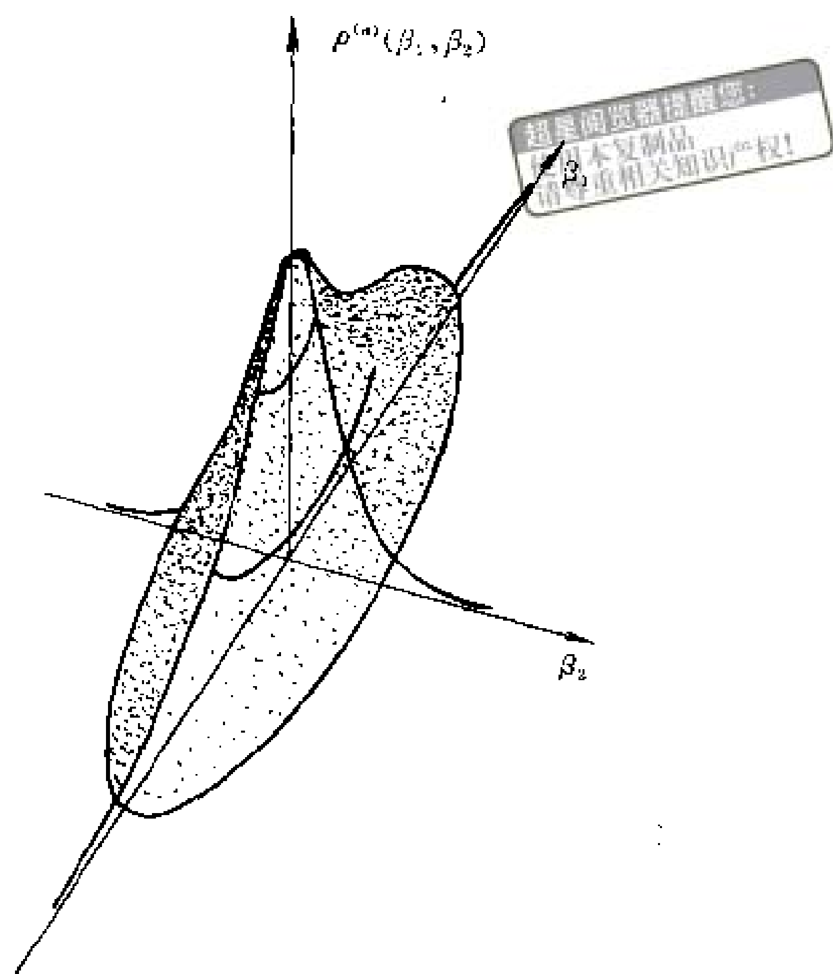


图 6-5-2　压缩态的几率密度

$$|m_g\rangle = (\hat{B}^+)^m (m!)^{-1/2} |0_g\rangle \qquad (6\text{-}5\text{-}56)$$

实际上，准粒子的真空态$|0_g\rangle$是经算符 $\hat{S}$ 扭曲后的真空态$|0\rangle$。这是因为

$$\hat{B}|0_g\rangle = \hat{S}\hat{b}\hat{S}^+ |0_g\rangle = 0 \qquad (6\text{-}5\text{-}57)$$

所以有：

$$|0\rangle = \hat{S}^+ |0_g\rangle \qquad (6\text{-}5\text{-}58)$$

由此得到

$$|0_g\rangle = \hat{S}^+ |0\rangle \qquad (6\text{-}5\text{-}59)$$

可见，被扭曲后的$|0\rangle$就是$|0_g\rangle$。由以上结果可知，$\hat{B}^+$可认为是准玻色子产生算符，$|0_g\rangle$是准粒子的基态，$|m_g\rangle$是准粒子的激发态。

通过这节讨论可以看出，光学压缩态在某个正交相分量上具有较小的量子噪声，而通常的相干态的光，例如 Nd:YAG 激光器的激光，就是在相干态，仍有量子起伏$(\Delta X_1)^2=(\Delta X_2)^2=1/4$，量子起伏的能量为$\hbar\omega/4$，它与 3400K 的热噪声能量相当。采用压缩态后，虽然Y_2的测量精度降低了，但Y_1的测量精度却提高很多。因此光学压缩态具有许多潜在的应用领域。

§6-6 光学压缩态的产生

通过上面讨论我们知道，光学压缩态是真空态在强的光场非线性作用下，性质发生变化的结果。所以许多非线性光学效应，可以产生压缩态。(6-5-42)式表明，若一个单模光场$\hat b$与其共轭光场$\hat b^+$混合，从而产生一个新模场$\hat B$为

$$\hat B=\mu\hat b+\nu\hat b^+ \qquad (6\text{-}5\text{-}42)$$

而且

$$|\mu|^2-|\nu|^2=1 \qquad (6\text{-}5\text{-}43)$$

根据上一节的讨论，若$\hat b$为相干态，则模$\hat B$就是所谓的光学压缩态。如此看来，位相共轭镜就是最好的态压缩器，所以诸如四波混频、参量放大、二次谐波、共振荧光、自由电子激光器等非线性系统，在原则上都可以产生光学压缩态。但是由于在系统中存在着与损耗过程(诸如介质的吸收、散射、腔镜的损耗等)相关的真空涨落以及泵浦光和原子的自发发光等的涨落起伏，它们将对光场的压缩性质产生明显的破坏作用，所以人们一直在探索比较理想的产生光学压缩态的系统。

较早提出产生光学压缩态的途径是双光子激光器，将(6-5-39)式称为双光子相干态(TCS)[4]。单光子的受激辐射过程产生相干态$|\beta\rangle$，而双光子的受激辐射过程则产生 TCS 态$|\beta\rangle_g$。从数学上来看，由(6-5-26)式，通过么正变换$\hat S$实现$|\beta\rangle_g$与$|\beta\rangle$之间联系，而

$\hat{S}$ 满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} S = \hat{H} S \tag{6-6-1}$$

上式中描写包括双光子过程在内的系统的哈密顿算符 $\hat{H}$,是 $\hat{b}^+\hat{b}$ 的正定二次型

$$\hat{H} = \hbar(f_1\hat{b}^+\hat{b} + f_2^*\hat{b}^2 + f_2\hat{b}^{+^2} + f_3^*\hat{b} + f_4\hat{b}^+) \tag{6-6-2}$$

上式中 C 数 f_i 是与时间有关的量。先看上式右端的第一项,由于厄米性,f_1 是实的,若模的频率为 ω,$f_1=\omega$,则第一项 $\hbar f_1\hat{b}^+\hat{b}$ 表示模的自由辐射能量。f_2 和 f_3 表示相互作用能量,其中第二、三项表示双光子跃迁的相互作用能量,第四、五项代表单光子跃迁的相互作用能量。在正定条件

$$f_1 > 2|f_2| \tag{6-6-3}$$

情形下,经过类似于包格留包夫(Bogoliubov)变换的标度变换,(6-6-2)式为

$$\hat{H} = f_0\hat{B}^+\hat{B} + f_0(|\mu f_3^* - \nu f_3|^2 + |\nu|^2) \tag{6-6-4}$$

上式中的 f_0 和 $\hat{B}$ 为

$$f_0 = (f_1^2 - 4|f_2|^2)^{1/2} \tag{6-6-5}$$

$$\hat{B} = \mu\hat{b} + \nu\hat{b}^+ + \mu f_3^* - \nu f_3 \tag{6-6-6}$$

μ 和 ν 分别为

$$\mu = \left[\frac{2}{f_0(f_1 - f_0)}\right]^{1/2} f_2^* e^{i\phi} \tag{6-6-7}$$

$$\nu = \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_0}\right)^{1/2} e^{i\phi} \tag{6-6-8}$$

上式中 ϕ 为任意相位。条件(6-6-3)是使(6-6-4)式的 H 保持正定,这样,H 的谱不应是由 $-\infty$ 到 $+\infty$,而是受到限制的。$\hat{B}^+$ 可认为是具有准粒子谱 f_0 的准玻色子产生算符。对于双光子过程,f_3 应为0,由(6-6-6)式得到

$$\hat{B} = \mu\hat{b} + \nu\hat{b}^+ \tag{6-6-9}$$

而且

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \tag{6-6-10}$$

正是产生光学压缩态或称双光子相干态所要求的条件，因此，双光子激光是产生光学压缩态的一种途径。

最早是在四波混频系统的实验中观察到光学压缩态现象的。现在从理论上分析前向简并四波混频产生光学压缩态的原理。设在非线性光学介质中沿 z 轴传播的频率为 ω 的平面光波为

$$E_l(z,t) = \frac{1}{2}\mathscr{E}_l(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_l z)}, \quad l = 1,2,3,4 \tag{6-6-11}$$

其中传播的两个弱光场为 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$，波矢为 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$，泵浦光为 $\mathscr{E}_3$ 和 $\mathscr{E}_4$，波矢为 $\boldsymbol{k}_3$ 和 $\boldsymbol{k}_4$，假设它们满足相位匹配条件

$$\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4 \tag{6-6-12}$$

求在简并四波混频过程中的 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$，根据非线性光学，光场 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 满足耦合波的方程为

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_1}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\xi^*\mathscr{E}_2 \tag{6-6-13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_2}{\mathrm{d}z} = \mathrm{i}\xi\mathscr{E}_1 \tag{6-6-14}$$

上式中耦合系数为

$$\xi = \frac{\omega}{2cn_0}\chi^{(3)}\mathscr{E}_3\mathscr{E}_4 \tag{6-6-15}$$

此处认为波矢 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 是平行的，$\chi^{(3)}$ 是介质的三级非线性电极化率，n_0 为介质的折射率。设非线性光学介质长为 L，考虑到 $Z=0$ 处的边界条件

$$\mathscr{E}_1(z=0) = \mathscr{E}_1(0)$$

$$\mathscr{E}_2(z=0) = \mathscr{E}_2(0)$$

则根据非线性光学，(6-6-13)和(6-6-14)式的解为

$$\mathscr{E}_1(L) = \mathscr{E}_1(0)\cosh(|\xi|L) - \mathrm{i}\mathscr{E}_2^*(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sinh(|\xi|L) \tag{6-6-16}$$

$$\mathscr{E}_2^*(L) = \mathscr{E}_2^*(0)\cosh(|\xi|L) + \mathrm{i}\mathscr{E}_1(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sinh(|\xi|L) \tag{6-6-17}$$

上式中 $\xi=|\xi|e^{i\phi}$。以上没有考虑光在介质中的损耗，所以研究的是理想压缩情形。

从量子力学观点来看，对于强的泵浦光场 $\mathscr{E}_3$ 和 $\mathscr{E}_4$ 可认为是经典的，则 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 光场的光子算符方程为

$$\frac{d\hat{b}_1}{dz}=-i\xi^*\hat{b}_2^+ \tag{6-6-18}$$

$$\frac{d\hat{b}_2^+}{dz}=i\xi\hat{b}_1 \tag{6-6-19}$$

在上式中取 $z=vt$，v 是介质中的光速。设 $\hat{b}_1(0)$ 和 $\hat{b}_2(0)$ 为在介质的 $z=0$ 端的光子湮没算符，初始条件为

$$\begin{aligned}\hat{b}_1(z=0)&=\hat{b}_1(0)\\ \hat{b}_2(z=0)&=\hat{b}_2(0)\end{aligned} \tag{6-6-20}$$

(6-6-18)和(6-6-19)的解为

$$\hat{b}_1(L)=\hat{b}_1(0)\cosh(|\xi|L)-i\hat{b}_2^+(0)e^{-i\phi}\sinh(|\xi|L) \tag{6-6-21}$$

$$\hat{b}_2^+(L)=\hat{b}_2^+(0)\cosh(|\xi|L)+i\hat{b}_1(0)e^{i\phi}\sinh(|\xi|L) \tag{6-6-22}$$

若令

$$\mu=\cosh(|\xi|L) \tag{6-6-23}$$

$$\nu=e^{-i\phi}\sinh(|\xi|L) \tag{6-6-24}$$

则(6-6-21)和(6-6-22)式为

$$\hat{b}_1(L)=\mu\hat{b}_1(0)-i\nu\hat{b}_2^+(0) \tag{6-6-25}$$

$$\hat{b}_2^+(L)=\mu\hat{b}_2^+(L)+i\nu^*\hat{b}_1(0) \tag{6-6-26}$$

若在非线性光学介质的终端 $z=L$ 处放置半反半透的分米镜，则产生两个新的光模式，现分别用 $\hat{g}$ 和 $\hat{l}$ 表示它们的光子的湮没算符，得到

$$\begin{aligned}\hat{g}&=\frac{1}{2^{1/2}}[\hat{b}_1(L)-i\hat{b}_2(L)]\\ &=\frac{\mu}{2^{1/2}}[\hat{b}_1(0)-i\hat{b}_2(0)]-\frac{\nu}{2^{1/2}}[\hat{b}_1^+(0)+i\hat{b}_2^+(0)]\end{aligned} \tag{6-6-27}$$

$$\hat{l}=\frac{1}{2^{1/2}}[\hat{b}_1(L)+i\hat{b}_2(0)]$$

$$=\frac{\mu}{2^{1/2}}[\hat{b}_1(0)+i\hat{b}_2(0)]+\frac{\nu}{2^{1/2}}[\hat{b}_1^+(0)-i\hat{b}_2^+(0)] \quad (6\text{-}6\text{-}28)$$

由(6-6-23)和(6-6-24)式得到$|\mu|^2-|\nu|^2=1$，所以，当在$z=0$处进入非线性介质的四波混频光场的$\hat{b}_1(0)$和$\hat{b}_2(0)$处于相干态，则$\hat{g}$和$\hat{l}$就是压缩态。

现在求模式$\hat{g}$的正交变量的噪声。引入

$$\hat{g}_1=\frac{1}{2}(\hat{g}^++\hat{g}) \quad (6\text{-}6\text{-}29)$$

$$\hat{g}_2=\frac{i}{2}(\hat{g}^+-\hat{g}) \quad (6\text{-}6\text{-}30)$$

分别表示模$\hat{g}$的同位相和非同位相的正交分量，按定义$(\Delta g_1)^2$和$(\Delta g_2)^2$为：

$$(\Delta g_1)^2=<[\hat{g}_1-\langle\hat{g}_1\rangle]^2> \quad (6\text{-}6\text{-}31)$$

$$(\Delta g_2)^2=<[\hat{g}_2-\langle\hat{g}_2\rangle]^2> \quad (6\text{-}6\text{-}32)$$

将(6-6-29)、(6-6-30)和(6-6-27)式代入，设$\hat{b}_1(0)$和$\hat{b}_2(0)$为相干态，则求出

$$(\Delta g_1)^2=\frac{1}{4}|\mu-\nu|^2 \quad (6\text{-}6\text{-}33)$$

$$(\Delta g_2)^2=\frac{1}{4}|\mu+\nu|^2 \quad (6\text{-}6\text{-}34)$$

可见只要$\mu\nu^*$是正实数，则ν越大，$\hat{g}_1$被压缩的越大。以上分析是理想压缩情形，即没有考虑在四波混频过程中，光与原子相互作用引起的损耗。分析表明，大的$|\nu|$值伴随着损耗值的增加。

在四波混频过程中产生光学压缩态的最早的实验是斯鲁歇(R. E. Slusher)等人在1985年完成的[1]。他们进行的实验是后向四波混频，目的是增大非线性和减少损耗。实验用的非线性光学介质是Na蒸汽。用CW单模环形染料激光器输出的激光，泵浦Na原子射束，调谐到比Na的D_2共振线超精细结构稍高或低1.5GHz。Na原子射束密度为$10^{11}cm^{-3}$，射束发射角为$\pm5°$，相应的都普勒加宽为100MHz。实验布置如图6-6-1所示，泵浦光泵浦

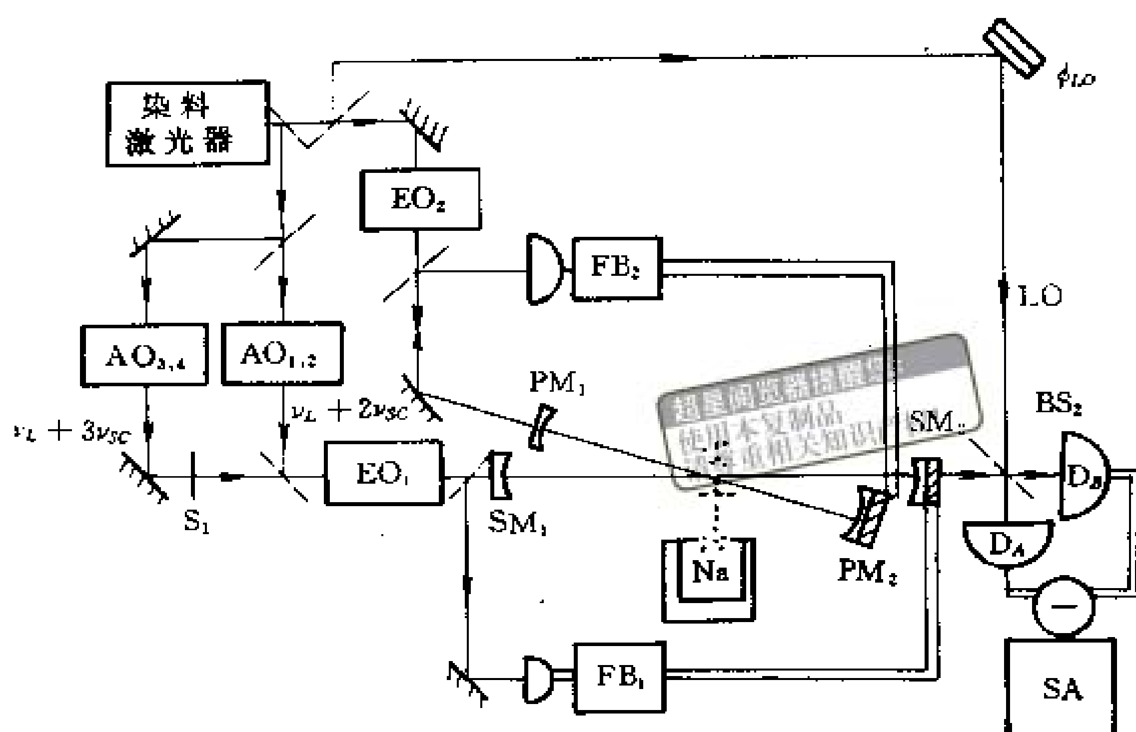


图 6-6-1　后向四波混频产生光学压缩态

由 PM_1 和 PM_2 反射镜组成的泵浦腔内的钠原子射束，被泵浦的 Na 原子在由 SM_1 和 SM_2 反射镜组成的共焦形式压缩腔内产生非简并四波混频增益。在腔中由四波混频过程产生的共轭光子对的线性组合产生光学压缩态。本地振荡光 LO 经 BS_2 分束，进入探测系统。注入到压缩腔内的光信号相对泵浦光有 $3\nu_L$ 的频移，ν_L 是纵模频率间隔，由频率移动器 $AO_{3,4}$ 产生的。图上的 EO_1 和 EO_2 是产生 f_m 旁带的装置，经过反馈 FB_1 和 FB_2 分别控制 SM_1、SM_2 腔和 PM_1、PM_2 腔达到稳频。S_1 是光栏，通过它测量经典四波混频增益。探测器是 p-i-n 硅光二极管。由分束器 BS_2 和探测器 D_A、D_B 组成的平衡外差探测系统，检测压缩腔的噪声并在频谱分析仪 SA 上观察。实验结果表明，观测到压缩腔内的一个相分量量子噪声低于真空噪声水平 7% 的压缩光场，即压缩量为 7%。压缩量不大的原因有二，首先是因为在被泵浦的钠原子的洛仑兹尾部中的吸收和再发射，出现自发辐射，因此四波混频增益要同这个自发辐射和真空起伏这两种过程作用；其次是泵浦光和本地振荡光相对于压

缩腔的快速相位变化(>20kHz)在实验中没有被校正，结果使被观测到的压缩噪声电平减少。经过改进，1986年的实验其压缩量提高到17%。

现在讨论压缩态光场的探测。在量子光学中测量光场特性的量，诸如$\langle\hat{n}\rangle$、$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle$、$\langle(\Delta\hat{X}_{1,2})^2\rangle$等等的基本技术大致有光子计数、符合测量和外差(零拍)测量。图6-6-2是在上面讨论过的实验中使用的平衡零拍探测系统的示意图[5]。输出电流正比于在光电探测器件1和2上的光电流之差，这种探测装置可消除由于本地振荡强度起伏造成的噪声。当一个光信号与一个相干态的本地振荡光发生零拍，设θ为本地振荡光相对于信号光的位相，则在本地振荡光振幅大大超过信号光振幅情形，合成光场的光子统计与信号光场偏差之间关系与θ有关。若随θ变化，光子统计从亚泊松分布变为超泊松分布，表明压缩态的存在。这就要求本地振荡光与信号光之间的位相，必须相对稳定。

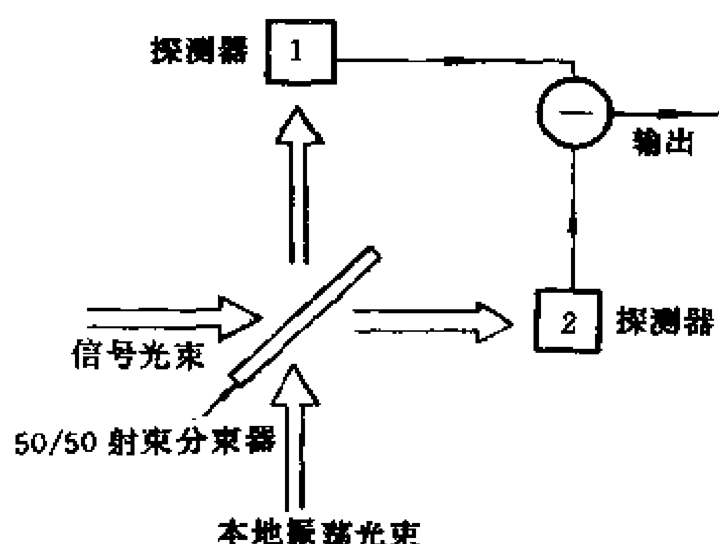


图 6-6-2 平衡零拍探测系统

另一种检测光学压缩态的方法是采用光子相关测量，若被压缩的参量能够改变符号，则随压缩参量的变化，光子统计例如从聚束变化为反聚束，表明压缩态存在。

梅塔(M. W. Maeda)等人在钠蒸汽中进行的前向四波混频过

程中产生光学压缩态的实验[6]，采用接近简并的具有试探-共轭输出光束组合的四波混频器，探测装置是平衡-混合器外差探测系统和频谱分析仪，如图 6-6-3 所示。实验用连续运转的染料激光器输出的激光，经分束得到本地振荡光，功率约 10mW，两束泵浦光，每

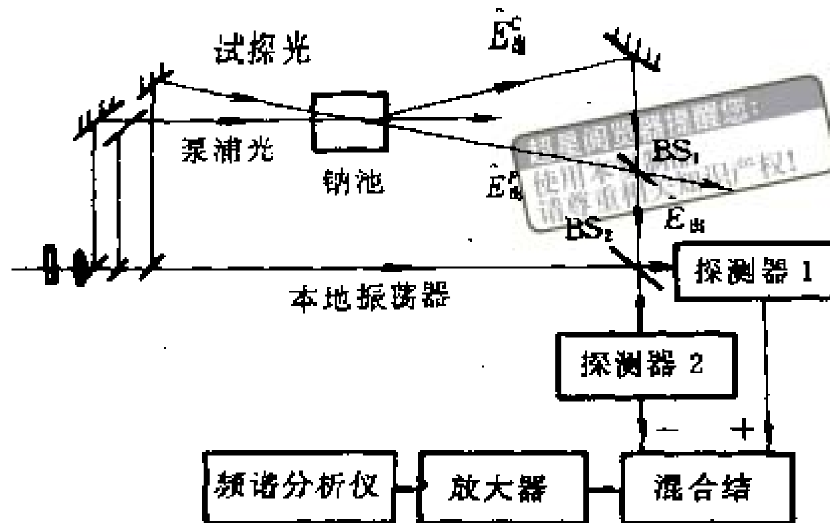


图 6-6-3 前向四波混频产生压缩态

束功率 20－50mW，输入试探光束，功率约 1mW。泵浦光和试探光都聚焦在前向四波混频装置中的钠池上，进行四波混频相互作用。输出的试探光束和共轭光束在 50%反射率的分束镜 BS1 上组合，产生混合输出光束 $\hat{E}_出$，它再同本地振荡光束一起进入 50%分束镜 BS2，并聚焦到具有相等量子效率的光电探测元件 1 和 2 上。$BS2$ 和两个光电探测元件组成平衡-混合器外差探测系统，在无线电频率 Ω 的频谱仪上观测。这样，输入光场为

$$\hat{E}^j_入(t)=\left(\frac{\hbar\omega}{VT}\right)^{1/2}\sum_{l=0}^{1}\hat{b}^j_入[\omega+(-1)^l\Omega]e^{-i[\omega+(-1)^l\Omega]t} \tag{6-6-35}$$

上式中 $j=p,c,p$ 表示试探光，c 表示共轭光，V 和 T 表示光场空间和时间范围。输出的试探光和共轭光为

$$\begin{aligned}\hat{b}^p_出(\omega\pm\Omega)&=\mu\hat{b}^p_入(\omega\pm\Omega)+i\nu\hat{b}^{c+}_入(\omega\mp\Omega)\\ \hat{b}^c_出(\omega\pm\Omega)&=\mu\hat{b}^c_入(\omega\pm\Omega)+i\nu\hat{b}^{p+}_入(\omega\mp\Omega)\end{aligned} \tag{6-6-36}$$

上式中 $|\mu|^2=\cos^2(\xi L)$，$|\nu|^2=\sinh^2(\xi L)$。为了确保四波混频产生

压缩态光场，在无损耗的半反半透分束器 $BS1$ 上将试探光输出和共轭光输出组合起来，输出光场为

$$\hat{E}_{出}(t) = \frac{1}{2^{1/2}}[\hat{E}^{p}_{出}(t) + \hat{E}^{c}_{出}(t)e^{ik\Delta L}] \tag{6-6-37}$$

上式中 ΔL 是试探光和共轭光之间的程差。使用相应的算符 $\hat{b}_+$ 和 $\hat{b}_-$，经变换得到

$$\hat{E}_{出}(t) = (\frac{2\hbar\omega}{VT})^{1/2}[\hat{b}_{+出}(\Omega)\cos\Omega t + \hat{b}_{-出}(\Omega)\sin\Omega t]e^{i\omega t} \tag{6-6-38}$$

上式中算符 $\hat{b}_{\pm出}(\Omega)$ 为

$$\hat{b}_{\pm出}(\Omega) = \mu\hat{b}_{\pm入}(\Omega) + i\nu e^{ik\Delta L}\hat{b}^{+}_{\mp入}(\Omega) \tag{6-6-39}$$

当输入的试探光束和共轭光束是在真空态中时，$\hat{E}_{出}$ 将被压缩。实验测得低于散粒噪声 4%的压缩态光场。

1986 年，人们完成采用简并的参量下转换过程从实验上产生光学压缩态[2]。光学参量放大和振荡过程的耦合波方程及其解与本节开始时讨论的耦合波方程及解相类似。在简并的参量下转换过程中，频率 ω_2 的光子转换为频率 $\omega_1=\omega_2/2$ 的相关的光子对。根据前面的分析，这个次谐波光场即处于压缩态中。实验装置如图 6-6-4 所示，泵浦光 ω_2 由 Nd:YAG 激光器的激光经非线性光学晶体 $Ba_2NaNb_5O_{15}$倍频产生；产生频率下转换的参量振荡器由非线性光学晶体 $MgO:LiNbO_3$和反射镜为 MM'的光学谐振腔组成。当泵浦光 ω_2 经 M 镜进入光学谐振腔时，在腔内产生频率下转换，频率下转换的光经 M'镜与本地振荡光合成，进入由两个 InGaAs 光二极管 DA 和 DB 构成的零拍平衡探测系统，测得压缩量高达 63%的光学压缩态。

现在讨论光场的振幅压缩态。光的位相 θ 和振幅亦即光子数 n，对于单模光场，它们满足量子力学测不准关系

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle\langle(\Delta\hat{\theta})^2\rangle \geqslant \frac{1}{4} \tag{6-6-40}$$

由上式看出，对于振幅压缩态光场，可以实现振幅即光子数 $\hat{n}$ 的压

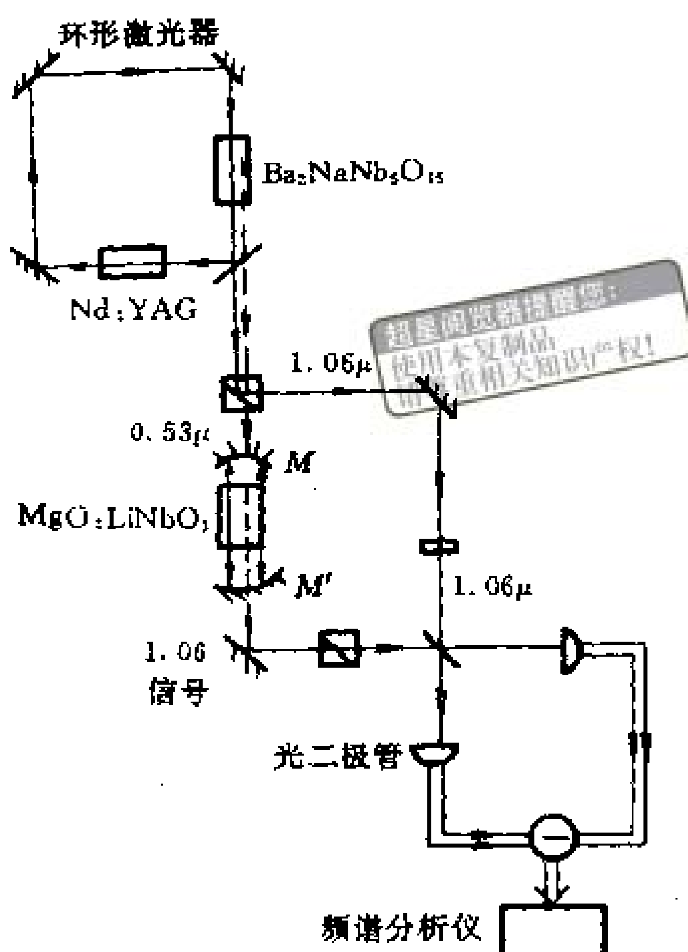


图 6-6-4 简并参量下转换产生光学压缩态

缩，达到$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle<\langle\hat{n}\rangle$，则

$$\langle(\Delta\hat{\theta})^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\frac{1}{\langle\hat{n}\rangle} \tag{6-6-41}$$

所以当$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle\to 0$时，由(6-4-6)式，得到$g^{(2)}(0)<1$，由此我们得到光子数服从亚泊松分布的光场。压缩态光场将光子数的涨落转移到光的位相涨落，光场接近于光子数本征态。

已经在负反馈半导体激光器中观察到亚泊松分布的光场[7,8]。

在研究光学压缩态过程中，近年来人们对非经典孪生光场(*Twin beams*)感光趣。因为孪生光场包含两个分立的光束，两个光束中光子成对出现。所以这两个光束的光子数起伏有相关性，测

量这两个光束的光子数差，即强度差，可获得低于标准量子极限的量子噪声。从实验上来看，采用两个光电探测器分别探测这两个光束，它们产生的量子涨落将低于光子的标准量子极限产生的散粒噪声极限。已经在连续波参量振荡器和脉冲参量放大器以及负反馈半导体激光器中，分别观察到低于散粒噪声极限以下的压缩量很大的孪生光束。



参 考 文 献

[1] Slusher R E et al. phys. Rev. Letters, Vol 55, 1985, 2409

[2] Ling-An Wu et al. phys. Rev. Letters, Vol 57, 1986, 2520

[3] Glauber R J. in"Quantum Optics" ed by S. M Kay and A. Maitland, Academic Press, London and New York ,1970, 53

[4] Yuen H P. phys. Rev. A. Vol 13, 1976, 2226

[5] Yurke, B. phys. Rev. A. Vol 32, 1985, 300; 311

[6] Maeda M W. et al, Opt. Letters, Vol 12, 1987, 161

[7] Machida S and Yamamoto Y. Opt. Comm, Vol 57. 1986, 290

[8] Machida S and Yamamoto Y. phys. Rev. Letters, Vol 58, 1987, 1000

第七章　光学孤子



§7-1　引　　言

光学孤子或称光学孤立波是自然界中孤立波和孤子现象中的一类。实际上人们很早以前就发现了孤立波现象，1844年英国科学家罗素(J. S. Russell)报告他曾在1834年8月观察一条船在河中运动时发现的现象：船沿狭窄的河边迅速前进突然停止时，河边被带动的水团聚集在船头，形成巨大的圆而光滑的孤立的水峰，突然离开船头，以极大的速度前进，一直保持着原始的形状和速度。罗素引入孤立波(Solitary waye)概念描写这一现象，但当时对这个问题没有任何数学上的分析。

六十年后，即1895年，柯特维哥-德维席斯(Koterweg-de-Vices)建立了浅水波方程，即KdV方程，发现这个方程的一个解正好对应于罗素发现的孤立波，就是说这个方程有孤立波解。使用计算机求解非线性微分方程成为可能之后，1962年佩令(J. K. Perriny)等人对研究基本粒子运动的高登(Gordon)方程进行数值模拟；1965年扎布斯基(Zabusky)等人对KdV方程进行数值模拟，先后发现两个孤立波碰撞前后波形和速度都保持不变，说明孤立波有明鲜的粒子性。1965年扎布斯基和克鲁斯卡尔(Kruskal)提出孤立子概念，为此构造了一个新的英文单词Soliton(中文的意思是孤立子或孤子)。近几十年来人们对非线性微分方程进行了广泛地研究，发现其中有不少都具有KdV方程的性质，所以孤立波问题涉及到自然界中的各方面现象。特别是非线性薛定谔方程的

建立，对孤子问题的精确而深入的研究奠定了基础。

孤立波就是在传播过程中保持自身形态不变的定域化的波。从波动的观点来看，可将孤立波看作具有恒定速度的波包，属于行波范畴；从粒子性的观点来看，孤立子与孤立波对应，可把孤立子看作为能量被集中在有限时间和空间的孤立波，既使孤子之间发生碰撞，碰撞后它们各自的能量不会随时间扩散，仍保持着原来的速度和形状。

孤立波和孤立子一般是对于具体问题用一个具体公式来定义，至今在数学上还没有给出一般的严格的定义。

由上述可知，孤立波现象首先是在流体力学中发现的，但是在后来的理论上的发展主要与基本粒子物理问题有关。在光学领域中的孤立波，最早应属自感透明现象的发现，但是光学孤子问题被大量研究是在 1973 年以后。1973 年长谷川(A. Hasegawa)和塔波特(F. Tappert)提出利用折射率非线性补偿低损耗光纤因群速色散引起的光脉冲展宽，来形成光学孤子的设想，1980 年莫列诺(L. F. Mollenauer)等人在实验上利用光纤得到光学孤子，1983 年他们又研制出孤子激光器，可人工产生孤子，近年来人们在实验上又实现了光纤拉曼孤子激光器。

孤子激光器最大的特点是能够产生甚短的光脉冲，从机制上看，它完全不同于通常的锁模激光器，它是非损耗的，它的输出脉冲宽度和形状由作为激光器构成部分的光纤决定，不依赖于与时间有关的增益或损耗。目前的孤子激光器可输出几十飞秒的光脉冲。

孤立波的研究成果有重要应用价值。关于求解 KdV 方程和非线性薛定谔方程等一类非线性微分方程发展的反散射方法，不仅可用来求解非线性偏微分方程，而且在近代光学中有广泛的应用领域。由于人们已经得到飞秒量级的光学孤子，所以光学孤子在光通讯工程、光子计算技术以及自然界中各类超快速现象的研究方面，具有巨大的潜在应用价值。

§ 7-2 光学自感透明

最早在实验上观察到的光学孤立波是光学自感透明现象，这是光脉冲在吸收介质中传播时发生的现象。为了从物理上理解光学自感透明，首先讨论光脉冲的传播。

设吸收介质是二能级原子系统，描写它的光学布洛赫方程为(1-6-59)—(1-6-61)式，假设光脉冲宽度颇小于 T_1、T_2，忽略损耗，则为

$$\dot{\xi} = -\eta\delta \tag{7-2-1}$$

$$\dot{\eta} = \xi\delta + \alpha_a E\zeta \tag{7-2-2}$$

$$\dot{\zeta} = -\alpha_a E\eta \tag{7-2-3}$$

设光场损耗为零，光的电场服从的波动方程为

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2} \tag{7-2-4}$$

设如图 7-2-1 所示的光脉冲的电场强度为

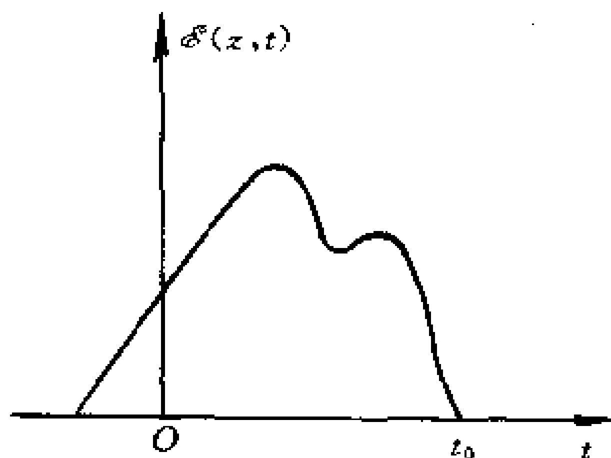


图 7-2-1 光脉冲的面积

$$E(t) = \frac{1}{2}\mathscr{E}\exp\{-\mathrm{i}[\omega t - kz + \phi(z,t)]\} + \mathrm{C.C} \quad (7\text{-}2\text{-}5)$$

介质的宏观电极化强度为

$$P(t) = \frac{N\mu}{2}[u(z,t)\text{-i}v(z,t)]\exp\{-\mathrm{i}[\omega t - kz + \phi(z,t)]\} + \mathrm{C.C} \quad (7\text{-}2\text{-}6)$$

上式中的 u 和 v 为

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\xi(\delta',z,t)g(\delta')\mathrm{d}\delta' \quad (7\text{-}2\text{-}7)$$

$$v = \int_{-\infty}^{\infty}\eta(\delta',z,t)g(\delta')\mathrm{d}\delta' \quad (7\text{-}2\text{-}8)$$

将(7-2-5)－(7-2-8)式代入(7-2-4)式，并取缓变近似，得到

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} = \frac{N\mu\omega c\mu_0}{2n}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\delta',z,t)g(\delta')\mathrm{d}\delta' \quad (7\text{-}2\text{-}9)$$

引入无量纲的量 Θ:

$$\Theta = \alpha_a\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}(t)\mathrm{d}t = \frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}(t)\mathrm{d}t \quad (7\text{-}2\text{-}10)$$

现在研究光脉冲面积 Θ 在空间传播的规律，根据(7-2-10)式的定义，由(7-2-9)式直接得到

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}z} = \frac{N\mu^2\omega c\mu_0}{2n\hbar}\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\delta',t,z)g(\delta')\mathrm{d}\delta' - \frac{\mu n}{c\hbar}\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t'}\mathrm{d}t' \quad (7\text{-}2\text{-}11)$$

对于图 7-2-1 所示的光脉冲，有下列结果

$$\mathscr{E}(z,\infty) = \mathscr{E}(z,-\infty) = 0 \quad (7\text{-}2\text{-}12)$$

由此得到(7-2-11)式右端最后一项积分值为零。当 $t \geq t_0$ 时，$\mathscr{E}=0$，布洛赫方程为

$$\dot{\xi} = -\eta\delta \quad (7\text{-}2\text{-}13)$$

$$\dot{\eta} = \xi\delta \quad (7\text{-}2\text{-}14)$$

$$\dot{\zeta} = 0 \tag{7-2-15}$$

这样，使用(7-2-13)式，(7-2-11)式为

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}z} = -\frac{N\mu^2\omega c\mu_0}{2n\hbar}\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\delta')}{\delta'}\mathrm{d}\delta'\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\xi(\delta,z,t')}{\partial t'}\mathrm{d}t'$$

$$= -\frac{N\mu^2\omega c\mu_0}{2n\hbar}\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\delta')}{\delta'}\mathrm{d}\delta'[\xi(\delta,z,t) - \xi(\delta,z,-\infty)] \tag{7-2-16}$$

求解布洛赫方程(7-2-13)—(7-2-15)式得到

$$\xi(\delta,z,t) = \xi_0\cos[(t-t_0)\delta] - \eta_0\sin[(t-t_0)\delta] \tag{7-2-17}$$

$$\eta(\delta,z,t) = \eta_0\cos[(t-t_0)\delta] + \eta_0\sin[(t-t_0)\delta] \tag{7-2-18}$$

上式中

$$\xi_0 = \xi(\delta,z,t_0) \tag{7-2-19}$$

$$\eta_0 = \eta(\delta,z,t_0) \tag{7-2-20}$$

代入(7-2-16)式，设 $\xi(\delta,z,-\infty)=0$，得到

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}z} = -\frac{N\mu^2\omega c\mu_0}{2n\hbar}\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\xi_0\cos[(t-t_0)\delta'] - \eta_0\sin[(t-t_0)\delta']\}\frac{g(\delta')}{\delta'}\mathrm{d}\delta' \tag{7-2-21}$$

可以证明上式右端第一个积分值为零，于是得到

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}z} = \frac{N\mu^2\omega c\mu_0}{2n\hbar}\eta(0,z,t_0)g(0)\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[(t-t_0)\delta']}{\delta'}\mathrm{d}\delta' \tag{7-2-22}$$

上式右端积分值为 π，现在求 $\delta=0$ 时的 $\eta_0=\eta(0,z,t_0)$，此时的布洛赫方程为

$$\dot{\xi} = 0 \tag{7-2-23}$$

$$\dot{\eta} = \frac{\mu}{\hbar}\mathscr{E}\zeta \tag{7-2-24}$$

$$\dot{\zeta} = -\frac{\mu}{\hbar}\mathscr{E}\eta \tag{7-2-25}$$

由上式得到

$$\eta(\delta = 0, z, t_0) = \zeta_0 \sin\Theta(z, t) \tag{7-2-26}$$

将上式代入(7-2-22)式，最后得到

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}z} = \frac{N\mu^2 \omega c \mu_0 g(0)\pi}{2n\hbar}\zeta_0 \sin\Theta \tag{7-2-27}$$

设二能级原子初始时处于基态，则 $\zeta_0 = -1$，又令

$$\alpha = \frac{N\mu^2 \omega c \mu_0 g(0)\pi}{n\hbar} \tag{7-2-28}$$

则(7-2-27)式为

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{2}\alpha \sin\Theta \tag{7-2-29}$$

(7-2-29)式就是光脉冲传播的面积定理，现在用它讨论光学自感透明的形成过程。(7-2-29)式的积分为

$$\mathrm{tg}\Theta = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha z}\mathrm{tg}\Theta_0 \tag{7-2-30}$$

由上式求出 Θ 与 z 的关系如图 7-2-2 所示。由图上曲线看出，若在吸收介质中($\alpha > 0$)有一个 $\pi < \Theta < 3\pi$ 的光脉冲传播，则光脉冲的 Θ 大于 π 的那部分，使 $\sin\Theta < 0$，根据(7-2-29)式，此时光脉冲随传播

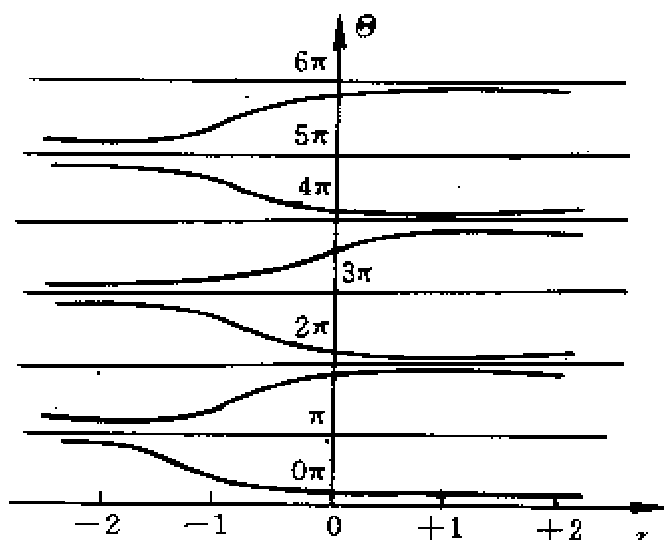


图 7-2-2 光脉冲的传播

距离增加；而 $\Theta < 3\pi$ 那部分光脉冲，因为 $\sin\Theta > 0$，由(7-2-29)式，这部分随传播距离增加而减少。可见，这样的光脉冲在吸收介质中

传播时，保持着大小为 2π 的面积，其物理原因可解释为此时的光脉冲前沿的能量被吸收，使介质的原子形成粒子数反转分布，光脉冲后沿到来时，因受激辐射过程辐射出的光能量又回到光脉冲中去。这种自持过程使此光脉冲在介质中不论传播多远，都不产生损耗，这就是孤立波的传播。

上面讨论的光学孤立波，它的稳定形状可由(7-2-9)式和(7-2-1)—(7-2-3)式求出[1]，为

$$\mathscr{E}(z,t) = \frac{z\hbar}{\mu z}\text{sech}\left[\frac{t - z/s}{\tau_p}\right] \tag{7-2-31}$$

上式中 τ_p 为光脉冲宽度，s 为光脉冲在介质中的传播速度，可以证明[1]，$s \approx c/1180$，即比在真空中的光速减慢三个量级。

人们曾使用不同的激光器和各种形态的介质进行过光的自感透明现象实验，图 7-2-3 是在掺铝的铝酸锂单晶($LiAl_5O_8$: Cr^{3+})中观察到的调 Q 红宝石激光器输出的光脉冲的自感透明，当入射的激光脉冲的 $\Theta \approx 2\pi$ 时，单晶透过率接近 1。

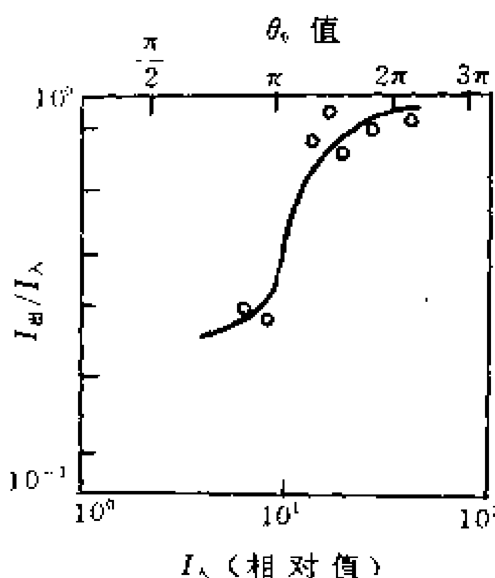


图 7-2-3　自感透明实验结果

综上，一个 $\Theta = 2\pi$ 的光脉冲在吸收介质中传播时，形状、能量和宽度都不改变，但传播速度比在真空中慢，光脉冲发生延迟。上

面分析的是 $\Theta=2\pi$ 脉冲的形成和稳定过程，但 2π 脉冲不能在介质中自己产生，只是通过吸收介质时损耗和弛豫使辐射衰减一部分，使孤立波部分被滤出来，从而形成稳定的 2π 脉冲。

§7-3　光纤压缩光脉冲和形成光学孤子

光纤具有压缩光脉冲和形成孤子的特性，这是长谷川等人首先从理论上指出的，随后为实验所证实，并依此研制成光学孤子激光器，飞秒量级的光脉冲技术由此得到迅速发展。这里我们首先从概念上进行一些分析。

一、光纤非线性

光纤具有波导作用，在其中传播的激光能量容易集中在芯截面的很小的面积上，因而可以造成高达兆瓦/厘米^2 的光功率密度，由此引起一系列的非线性光学效应。由非线性光学知道，光纤折射率的非线性可表示为

$$n = n_0 + n_2|E|^2 \tag{7-3-1}$$

上式中 n_0 为光纤的通常的折射率，n_2 为光纤的非线性折射率，一般与频率无关，它由光纤介质的三阶非线性电极化系数 $\chi^{(3)}$决定，其数量级约为 $10^{-16}\text{cm}^2/\text{W}$。

二、频率啁啾

当光强为 $I(t)$的光脉冲通过长为 L 的光纤传输后，由于非线性光学效应产生的相位移动为

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi}{\lambda}n_2 I(t)L \tag{7-3-2}$$

可见光脉冲 $I(t)$的不同部分，相应于不同的相位移动，这种现象称为自相位调制，如图 7-3-1 所示。光脉冲 $I(t)$经自相位调制后的频

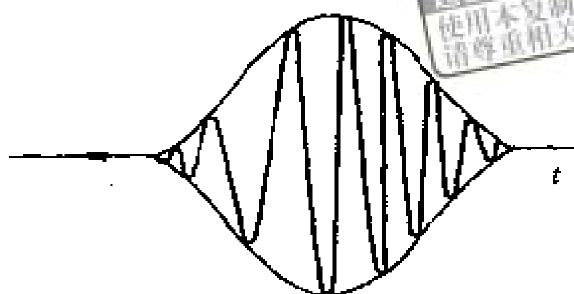


图 7-3-1　自相位调制

谱分布 $I(\omega)$ 可使用付利叶变换求得，对于高斯型光脉冲，频谱分布如图 7-3-2 所示。

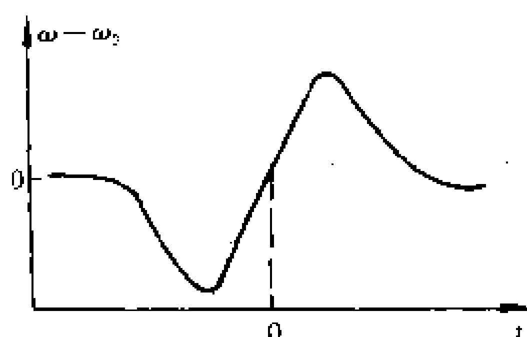


图 7-3-2　频谱分布

由于产生附加的相位，所以要产生频率移动 $\Delta\omega$：

$$\Delta\omega=\frac{\partial}{\partial t}[\Delta\phi(t)] \tag{7-3-3}$$

由 (7-3-2) 和 (7-3-3) 式可以看出频移 $\Delta\omega$ 沿光脉冲 $I(t)$ 成一种分布状态，称此为啁啾(chirp)，啁啾是光强度的函数。光脉冲的前半部，$I(t)=|E|^2$ 增加，相位落后越来越大，频率变低，相当于频率的减少；光脉冲的后半部，$I(t)$ 减少，相位落后越来越小，相当于频率增加，即频率变高。啁啾使光脉冲的前部的频率变低，尾部的频率增高如图 7-3-3 所示。下面将会看到，非线性光学效应产生的啁啾，是补偿群速色散引起光脉冲在光纤中展宽的物理基础，并形成一阶光学孤子和高阶光学孤子，如图 7-3-4 所示。

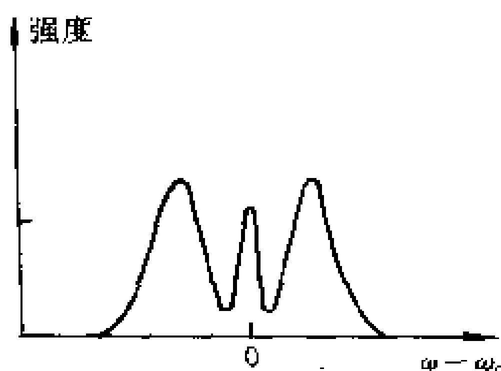


图 7-3-3

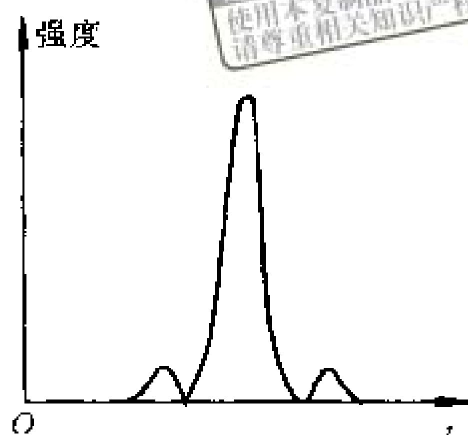


图 7-3-4　脉冲座的形成

三、群速色散

光脉冲波包中心的前进速度为群速 v_g

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{7-3-4}$$

当波包通过色散介质时，它的各个单色分量将以不同的相速前进，整个波包在向前传播过程中，同时发生形状的变化。设在光纤中传播的脉冲光模式的波数为 k，在光纤中用有效折射率 n_e 表示 k：

$$k=\frac{\omega}{c/n_e} \tag{7-3-5}$$

上式中有效折射率 n_e 为

$$n_e=n_{oe}+\beta n_2 \tag{7-3-6}$$

上式中 n_{oe} 表示折射率的线性部分，设光纤的截面元为 ds，则光脉冲功率 $P=\int I\mathrm{d}s$，引入光纤的有效截面 $S_e=P^2/\int I^2\mathrm{d}S$，上式中的 β 则为

$$\beta=\frac{P}{S_e} \tag{7-3-7}$$

为研究光脉冲的群速色散现象，暂不考虑光纤中增益和损耗，只考虑非线性光学效应，群速色散将出现在波数 k 按光脉冲的中心频率 ω_0 的展开式中

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0)\frac{\partial k}{\partial \omega} + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} + \cdots + BP$$

(7-3-8)

上式中的最后一项表示与入射光脉冲功率有关的非线性项，这是自相位调制产生的影响，给出光脉冲的非线性展宽，系数 B 为

$$B = \frac{\omega_0 n_2}{cS_e} \tag{7-3-9}$$

若令

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} = k' \tag{7-3-10}$$

它是频率为 ω_0 的群速的倒数，再令

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = k'' \tag{7-3-11}$$

k''为频率色散常数，它决定光纤的色散参数 D

$$D = \frac{\partial}{\partial \lambda}(v_g{}^{-1}) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}k'' \tag{7-3-12}$$

最后得到无损耗、无增益、忽略高阶群速色散情形下的 k 展开式为

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0)k' + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 k'' + BP$$

(7-3-13)

由上述可见，对于光纤系统，在线性情形，光脉冲的展宽起因于群速色散。

四、光纤压缩光脉冲和形成光学孤子

光纤压缩光脉冲和形成光学孤子，由(7-3-13)式中的最后两项所代表的物理过程决定。若它们代表的线性展宽过程与非线性展宽过程，在光纤中相抵消，即这两项相等而符号相反，则有可能实现光脉冲的无扩展传输，形成光学孤子。因为光纤的 $B>0$，所以条件归结为 $k''<0$，即在负色散情形下，群速色散效应与非线性效应相抵消。

综上分析，我们得到光纤压缩光脉冲和形成光学孤子的物理

图象如下：根据对频率啁啾的分析，光纤中的光脉冲前沿部分，因 $I(t)$ 增加，相位落后，越来越使频率减少，又因为在负色散情形下，群速度随频率增加而增加，所以光脉冲的前半部分群速度小，出现滞后。光脉冲的后沿部分 $I(t)$ 减少，相位落后越来越小，相当于频率增加，所以光脉冲的后半部分群速度大，出现超前，结果光脉冲被压缩而变窄。当这种由于非线性效应产生的压缩作用与群速色散 k'' 产生的光脉冲展宽作用恰好相抵消时，光脉冲形状不变，由此形成基本光学孤子，称此为一阶光学孤子。若非线性效应产生的对光脉冲的压缩作用大于群速色散产生的光脉冲的展宽作用时，则可得到更窄的光脉冲，即出现高阶光学孤子，有次峰出现，形成脉冲座，如图 7-3-4 所示。

上面就是利用光纤折射率的非线性来补偿由于色散引起的脉冲展宽，实现光纤压缩光脉冲和形成光学孤子的物理过程。它与通常的锁模激光器产生超短光脉冲的过程不同，是一种非损耗方法。非线性光学效应在光纤中的产生，与入射光的强度直接有关，所以对于给定的光纤，显然存在着一个阈值功率 P_t，当光脉冲的功率超过或等于它时，才能在光纤中观察到光脉冲的压缩和形成光学孤子的现象。

在正的群速色散区域，由于啁啾脉冲要被展宽，可在光纤后面加延迟线，也能压缩光脉冲。

五、光纤压缩光脉冲实验

上面讨论的光纤压缩光脉冲和形成光学孤子的原理是长谷川和塔波特在 1973 年提出的[3]，当时由于没有合适的红外波段激光器和波长大于 1.3μm 的低损耗光纤，而无法进行实验。1980 年莫列诺（L. F. Mollenauer）等人首次在实验上证实了单光纤具有压缩光脉冲和形成光学孤子的作用[4]。实验采用 Nd^{3+}：YAG 锁模激光器作泵浦源，同步泵浦 F_2^+ 色心晶体的色心激光器，以此作为光源。色心激光器平均输出功率 1W，脉宽 8ps，波长在 1.35—

1.75μm 之间可调谐。SiO_2 光纤长 700m，单光纤对于 $\lambda=1.55\mu$m 的输入激光，折射率 $n_0=1.45$，$n_2=3.2\times10^{-16}$cm^2/W，D＝15ps/nm/km，在 $\lambda=1.3\mu$m 处，群速色散由负变为正。实验布置如图 7-3-5 所示。色心激光器输出的激光，经 $M_1M_2A_1A_2$ 构成的光束导向系统，再经分束镜 S_1 进入光纤，测量光纤输出脉冲宽度和形状的自相关测试系统，由 $S_2M_5M_6M_7CC_2$ 以及 ADP 晶体组成。实验结果表明，对于输入到光纤的激光脉冲的压缩存在阈值，大约为 1.2W，高于阈值时观察到光脉冲的压缩和光学孤子的形成。图 7-3-6 是输入到光纤的激光波形，脉宽为 7ps。图 7-3-7 是在不同输入功率下观测到的光纤输出自相关测量结果。输入功率低于阈值时，光脉冲经过光纤后反而被展宽；当输入功率为 5W 时，脉冲变窄，输入功率再高时，输出的光脉冲有次峰和脉座。

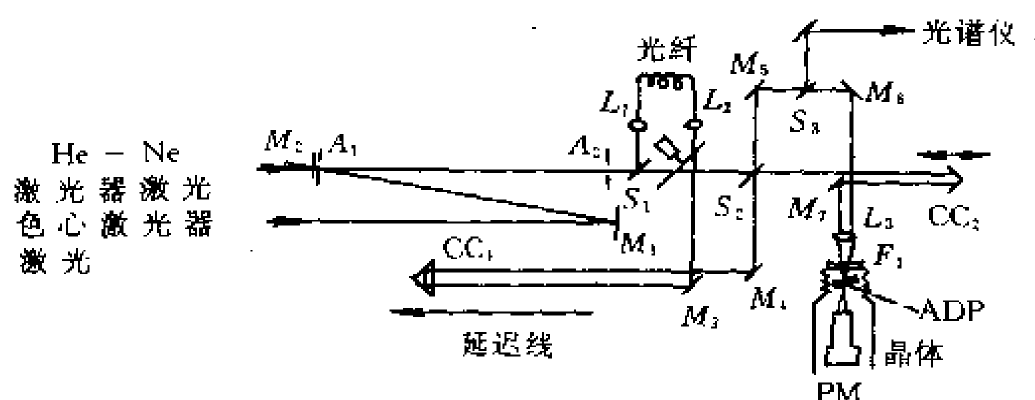


图 7-3-5　光纤压缩光脉冲和形成光学孤子实验

此外，采用光纤-光栅对以及正色散光纤与负色散光纤直接对接构成的全光纤，都在实验上观察到光脉冲的压缩。

§7-4　光纤孤子的非线性薛定谔方程

前边已经分析过，若光纤中的群速色散与非线性效应相平衡时，光纤中可形成光学孤子，此即基阶孤子；当群速色散小于非线

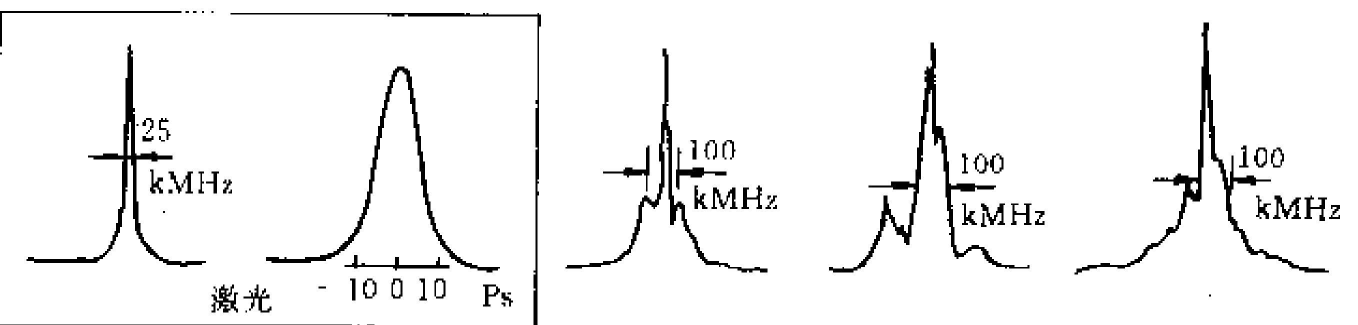


图 7-3-6　输入的激光脉冲

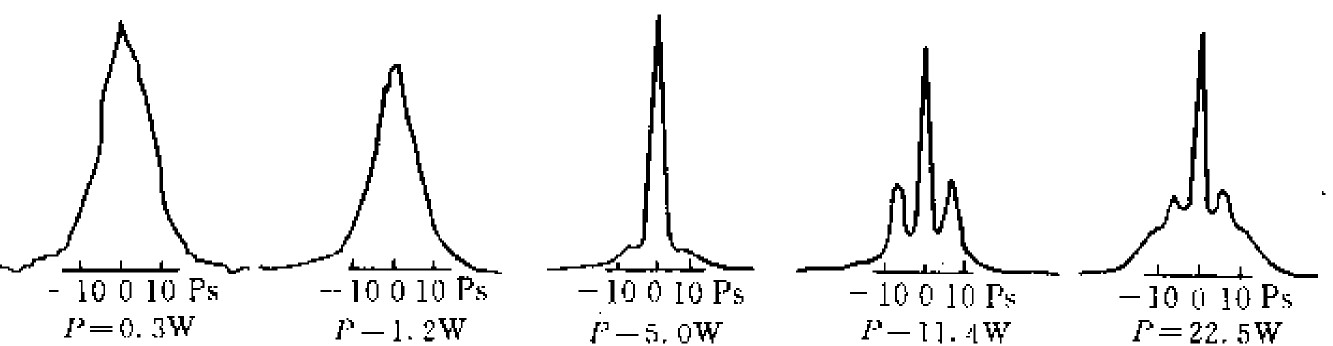


图 7-3-7　光纤的输出

性效应，则在光纤中形成高阶孤子。可见，讨论光脉冲在光纤中的传输，应在麦克斯韦方程组中同时考虑非线性光学效应和群速色散的影响，由此导致建立光纤中光学孤子传输所服从的非线性薛定谔方程。

先用简单、直观的方法，建立非线性薛定谔方程。假设光纤传输的光脉冲的电场为

$$E(z,t)=\mathrm{Re}\{\mathscr{E}(z,t)\exp[\mathrm{i}(k_0 z-\omega_0 t]\} \tag{7-4-1}$$

式中 ω_0 是载波频率或信号的中心频率，k_0 是它们的波数。对于 SiO_2 光纤，属于克尔型非线性光学介质，考虑到折射率非线性，则 k 可表示为

$$k=\frac{\omega}{c}[n_0(k,\omega)+n_2(k,\omega)|E|^2] \tag{7-4-2}$$

就是说

$$k=k(\omega,|E|^2) \tag{7-4-3}$$

在非线性光学效应和群速色散同时存在情形下，将 k 在 k_0、ω_0 和 $|E|^2=0$附近展开

$$k-k_0=\frac{\partial k}{\partial\omega}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}(\omega-\omega_0)^2+\cdots+\frac{\partial k}{\partial|E|^2}(|E|^2) \tag{7-4-4}$$

设入射光场是准单色的，取缓变包络近似，则其任意频率都与载波频率 ω_0 接近，如以

$$\begin{aligned}&-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\text{ 代替 }k-k_0\\&\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\text{ 代替 }\omega-\omega_0\end{aligned} \tag{7-4-5}$$

则由(7-4-4)式直接得到

$$\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial k}{\partial\omega}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial k^2}+\frac{\partial k}{\partial|E|^2}(|\mathscr{E}|^2)\mathscr{E}=0 \tag{7-4-6}$$

因为

$$\frac{\partial k}{\partial|E|^2}=\frac{n_2 k_0}{n_0}=\frac{n_2\omega_0}{c} \tag{7-4-7}$$

对于简谐变化的信号，$\langle E\rangle^2=\frac{1}{2}|\mathscr{E}|^2$，引入损耗系数 γ_c 表示脉冲光场振幅在光纤中传输的损耗，则(7-4-6)式可表示为

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{E}(z,t)+\mathrm{i}k'\,\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{E}(z,t)+\mathrm{i}\gamma_c\mathscr{E}(z,t)-\frac{1}{2}k''\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{E}(z,t)$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\omega_0 n_2}{c}|\mathscr{E}|^2\mathscr{E}(z,t)=0 \qquad (7\text{-}4\text{-}8)$$

式中

$$k'=\frac{\partial k}{\partial\omega},\qquad k''=\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2} \qquad (7\text{-}4\text{-}9)$$

若引入变换[5,6]

$$\begin{aligned}
\xi &= 10^{-9}\,\frac{z}{\lambda}\\
\tau &= \frac{10^{-4.5}}{(-\lambda k'')^{1/2}}\left(t-\frac{z}{v_g}\right)\\
u &= 10^{4.5}(\pi n_2)^{1/2}\mathscr{E}\\
\Gamma &= 10^9\lambda\gamma_c
\end{aligned} \qquad (7\text{-}4\text{-}10)$$

则由(7-4-8)式得到无量纲的非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+|u|^2u=-\mathrm{i}\Gamma u \qquad (7\text{-}4\text{-}11)$$

现在从麦克斯韦方程组出发，考虑到光纤的群速色散和非线性光学效应，直接建立上述的非线性薛定谔方程。光的电场 $E(z,t)$服从由麦克斯韦方程组导致的下列波动方程

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2}=\mu_0\,\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2} \qquad (7\text{-}4\text{-}12)$$

上式中的 $P(z,t)$是光纤的宏观电极化强度。

首先讨论具有群速色散情形下，光的电场服从的方程。对于随时间简谐变化的光场，方程(7-4-12)式右端项为

$$\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2}\simeq-\omega^2P(z,t) \qquad (7\text{-}4\text{-}13)$$

介质宏观电极化强度与光的电场之间关系为

$$P(z,\omega)=\varepsilon_0\chi(\omega)E(z,\omega) \tag{7-4-14}$$

上式中以频率 ω 表示的宏观电极化强度 $P(z,\omega)$ 与 $P(z,t)$ 之间关系，由付利叶变换求得

$$P(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7-4-15}$$

将(7-4-14)和(7-4-15)式代入(7-4-13)式，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2}&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(z,t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k(\omega_0)z-\omega_0 t']}\mathrm{d}t'\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\chi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=-\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(z,t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_0 z-\omega_0 t']}\mathrm{d}t'\int_{-\infty}^{\infty}\{\omega_0^2\chi(\omega_0)\\&\quad+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\omega^2\chi(\omega)](\omega-\omega_0)\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}[\omega^2\chi(\omega)](\omega-\omega_0)^2\\&\quad+\cdots\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{7-4-16}$$

考虑到色散，上式中将 $\omega^2\chi(\omega)$ 项在 ω_0 附近进行了展开。(7-4-16)式中右端的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\omega^2\chi(\omega)]$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}[\omega^2\chi(\omega)]$ 可用以下关系表示。因为

$$k^2(\omega)=\varepsilon_0\mu_0\omega^2+\varepsilon_0\mu_0\omega^2\chi(\omega) \tag{7-4-17}$$

由此求出

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\omega^2\chi(\omega)]=2k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}-2\mu_0\varepsilon_0\omega \tag{7-4-18}$$

$$\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}[\omega^2\chi(\omega)]=k\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}+\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)^2-\mu_0\varepsilon_0 \tag{7-4-19}$$

又由 δ 函数性质知道

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_0)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\mathrm{d}\omega=(\mathrm{i})^n\delta^{(n)}(t-t') \tag{7-4-20}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\delta^{(n)}(t-t')\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}^n g(t)}{\mathrm{d}t^n} \tag{7-4-21}$$

上式中 $\delta^{(n)}$ 是 δ 函数的 n 阶微商，$g(t)$ 是 t 的任意函数。将(7-4-18)和(74-19)式代入(7-4-16)式，并使用(7-4-20)和(7-4-21)式，

即可得到(7-4-16)式结果的表示式。

对(7-4-12)式左端取缓变近似后，(7-4-12)式最后的形式为

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{E}(z,t) + k'\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}(z,t) + \frac{\mathrm{i}}{2}k''\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{E}(z,t) = 0 \quad (7\text{-}4\text{-}22)$$

这是只考虑光纤具有群速色散时，光场传输服从的方程，称它为双曲方程。

再来讨论光纤的非线性光学特性的影响，根据付利叶变换，得到从 z_0 传输到 $z=z_0+\Delta z$ 处光的电场为

$$\mathscr{E}(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}(z_0,t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k(\omega)-k_0](z-z_0)} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\mathrm{d}t'\mathrm{d}(\omega-\omega_0) \quad (7\text{-}4\text{-}23)$$

由上式可直接求出(7-4-22)式中的关于 $\mathscr{E}$ 的微商项：$\partial\mathscr{E}(z,t)/\partial t$、$\partial^2\mathscr{E}(z,t)/\partial t^2$ 和 $\partial\mathscr{E}(z,t)/\partial z$，将其结果代入(7-4-22)式，并使用(7-4-4)式，最后得到

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{E}(z,t)+k'\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}(z,t)+\frac{\mathrm{i}}{2}k''\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{E}(z,t)=\mathrm{i}\frac{\omega_0 n_2}{c}\frac{1}{2}|\mathscr{E}|^2\mathscr{E}(z,t) \quad (7\text{-}4\text{-}24)$$

考虑到损耗项后，得到与(7-4-8)式相一致的结果，因而得到(7-4-11)式形式的非线性薛定谔方程。

关于光纤中光脉冲传输的非线性薛定谔方程的建立，还有一些具体方式方法[7]，主要物理过程已如上述。考虑到高阶色散项，(7-4-8)式可表示为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{E}(z,t) + \mathrm{i}k'\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}(z,t) - \frac{1}{2}k''\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{E}(z,t) + \frac{1}{2}\frac{\omega_0 n_2}{c}|\mathscr{E}|^2\mathscr{E}(z,t) + \mathrm{i}\gamma_c\mathscr{E}(z,t) - \mathrm{i}\frac{1}{6}k'''\frac{\partial^3}{\partial t^3}\mathscr{E}(z,t) = 0 \quad (7\text{-}4\text{-}25)$$

上式中的第三项表示光纤的群速色散的作用，第四项表示非线性光学的作用，第五项表示损耗，第六项表示高阶色散。如果不考虑损耗和高阶色散，只有群速色散和非线性这两项，则对于一个 $\partial^2\mathscr{E}/\partial t^2<0$ 的光脉冲，一般而言 $n_2>0$，可以看出，当 $k''<0$ 时，上式

中第三、第四这两项可相互抵消，再一次得出，这时有孤立波的解。

我们下边要用的无量纲非线性薛定谔方程为(7-4-11)式，它只是对皮秒量级情形下的光脉冲适用，对于飞秒量级的光脉冲，尚须进一步修正。

§ 7-5 光纤中光学孤子的性质

现在讨论光学孤子在光纤中传输表现出的一些性质，为此先研究非线性薛定谔方程(7-4-11)式的求解问题

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+|u|^2u=-\mathrm{i}\Gamma u$$

若忽略损耗项，上式为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+|u|^2u=0 \qquad (7\text{-}5\text{-}1)$$

已经研究出了求解非线性薛定谔方程(7-5-1)式的方法，这就是逆散射法或称反散射法。在这方面数学上的研究已经相当深入，对于含修正项的非线性薛定谔方程以及变形的非线性薛定谔方程等，都已有明确的数学结果，特别是结合光纤的实际情况，人们已作了大量研究[8]。要提出的是逆散射法本身，对发展光学理论也有重要的应用。这里结合数学上的一些结果，作相应的物理上地讨论。

方程(7-5-1)式，当初始条件为

$$U(\xi=0,\tau)=N\mathrm{sech}(\tau) \qquad (7\text{-}5\text{-}2)$$

时，人们使用反散射法求得了解，当 N 取正整数时的解情况如下。

当 $N=1$ 时，(7-5-1)式的解的形式较比简单，为[9]

$$U(\xi,\tau)=\mathrm{sech}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\xi}{2}} \qquad (7\text{-}5\text{-}3)$$

非线性薛定谔方程在 $N=1$ 时的解，为基本孤子。现在讨论基阶孤子的一些性质。根据前一节分析，光纤的群速色散与非线性光学效应相平衡时，则可压缩光脉冲和形成光学孤子，因为频率啁啾是光

强的函数，所以在光纤中形成光学孤子时，存在着阈值条件，其阈值功率为

$$P_1 = \frac{S_e \lambda}{2\pi n_2 z_c} \tag{7-5-4}$$

上式中的 z_c 为

$$z_c = 0.322\,\frac{2\pi c \tau_c^2}{\lambda^2 |D|} \tag{7-5-5}$$

前节的分析曾指出这样得到的是基孤子，它的脉宽 τ_c 由以上二式得到为

$$\tau_c = \sqrt{0.0786\,\frac{\lambda^3 S_e |D|}{c n_2 P_1}} \tag{7-5-6}$$

由上式看出，基孤子脉宽与基孤子周期无关，通过调节光纤中的光功率可改变基孤子的脉宽。基孤子在光纤中的传输波形如图 7-5-1(a)所示。

当 $N=2$ 时，初始条件(7-5-2)式为

$$U(\xi = 0, \tau) = 2\mathrm{sech}(\tau) \tag{7-5-7}$$

(7-5-1)式的解为[9]

$$u(\xi,\tau) = \frac{4e^{i\xi/2}[\cosh(3\tau) + 3e^{i4\xi}\cosh(\tau)]}{\cosh(4\tau) + 4\cosh(2\tau) + 3\cos(4\xi)} \tag{7-5-8}$$

由上式看出，二阶孤子在波形上是周期变化的，周期 z_0 为

$$z_0 = \frac{\pi}{2} z_c = 0.322\,\frac{\pi^2 c \tau_c^2}{\lambda^2 |D|} \tag{7-5-9}$$

若光纤长为 L，光脉冲在光纤中往返传输一次又回到原处，对于稳态而言，应与原来状态相同，就是说要求

$$m z_0 = 2L \tag{7-5-10}$$

式中 $m=1,2,3\cdots$，实验表明 $m=1$，将(7-5-9)式代入上式，得到二阶光学孤子的脉宽为

$$\tau_c = \left(0.629\,\frac{\lambda^2 |D| L}{c}\right)^{1/2} \tag{7-5-11}$$

上式表明，通过改变光纤的长度 L，可改变二阶光学孤子的脉宽，

二阶光学孤子在光纤中传播的波形如图 7-5-1(b)所示，在半周期 $\xi=\pi/4$ 处，二阶光学孤子的主峰两侧各有明显的小峰。

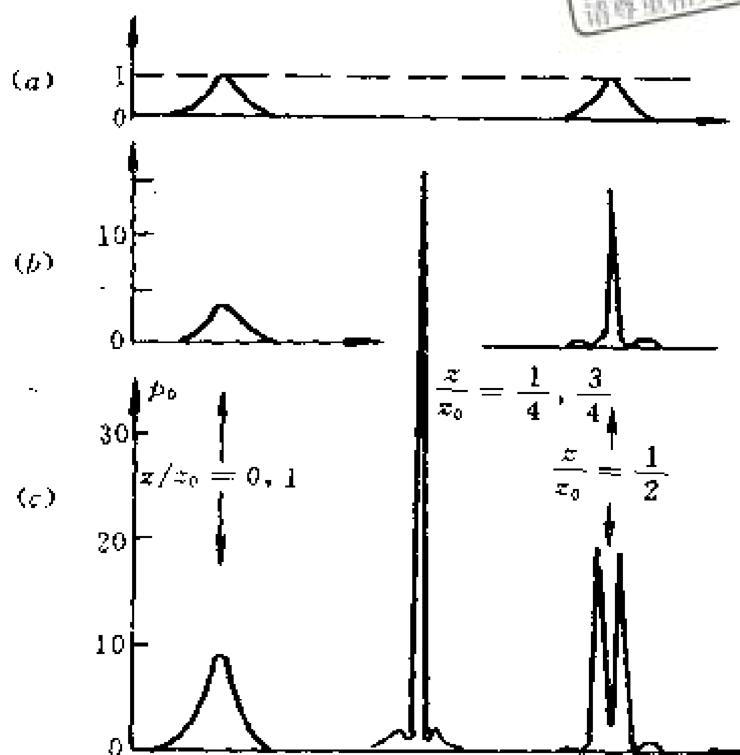


图 7-5-1　孤子传输时波形

(a)基孤子($N=1$)　(b)二阶孤子($N=2$)　(c)三阶孤子($N=3$)

当 $N=3$ 时，得到的三阶光学孤子在光纤中传输时的波形，如图 7-5-1(c)所示。同样可求出 $N=4$，$N=5$ 等情况下光学孤子的传输波形[10]。

一般而言，在光纤中传输的光学孤子的阶数 N 大约为

$$N=\sqrt{\frac{P}{P_1}} \tag{7-5-12}$$

当 N 不取正整数时，例如有波动量，则非线性薛定谔方程的解包含有孤子部分和非孤子部分，随传输距离的增加，非孤子部分变小，能趋向于孤子解。

以上的讨论都是在光纤的负色散区，即 $k''<0$ 情形下的光纤中光学孤子问题。在光纤的正色散区，非线性薛定谔方程中表示色

散的项应为负的，所以在光纤正色散区非线性薛定谔方程为：

$$\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial \xi}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}+|U|^2U=0 \qquad (7\text{-}5\text{-}13)$$

它的解为

$$U(\xi,\tau)=\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho^2\xi}\mathrm{tgh}(\rho\tau) \qquad (7\text{-}5\text{-}14)$$

上式表示的是暗孤子(Dark Soliton)，上式中的 ρ 决定暗孤子的振幅和形状。这样，前边讨论的光学孤子可称为亮孤子，亮孤子的背景当然是暗的，所以暗孤子的背景是亮的，它是以一定形状传输的暗脉冲。分析表明，在光纤中在相同损耗情形下，暗孤子的脉宽在传输过程中展宽的慢，所以在有损耗和背景噪声情形下，光纤中的暗孤子比亮孤子稳定。同时，暗孤子在光纤中的传播损耗，也可用增益补偿。

此外，人们还发现光学孤子之间存在着相互作用，这在光纤通讯中是至关重要的问题，因为光纤通讯中使用的是光学孤子串，而不是单个的孤子。已经发现两个光学孤子之间的作用与光学孤子之间的时间间隔、振幅以及相位有关。光学孤子之间的相互作用可以引入相互作用力描写，它随光学孤子之间的距离增加而指数衰减，随它们之间的相位变化而变化，对它们之间初始相位差极其敏感。当两个光学孤子间间距很小时，光学孤子相互作用力表现为吸引力，使两个光学孤子接近，并可合并。当两个光学孤子的间隔较大时，这种相互作用力可忽略。根据以上分析可知，可以通过改变光学孤子的振幅或位相，来减少或增加它们之间的相互作用。

关于光学孤子本身的性质的研究，目前正在不断深入和扩展中，诸如正在进行的光学孤子双稳态、光学孤子混沌以及光学孤子压缩态等的研究，将使人们对光学孤子的性质有更为深入的认识。

§7-6 孤子激光器

一、光纤孤子激光器

1983 年，莫列诺等人研制成功了产生光学孤立波的孤子激光器[11]，至此，人们可以人工地产生光学孤子和控制光学孤子的参数。孤子激光器主要由两部分组成，其中一部分是单模保偏光纤，另一部分是波长在 1.4—1.6μm 的锁模色心激光器，选择这样波长的激光器是为了能在单模光纤中无损耗地传输。色心激光器的色心晶体为 KCl：Tl，用 YAG 激光器泵浦，泵浦光波长为 1.06μm，泵浦功率约 5W，泵浦光脉宽 8ps。有两个腔，其中一个腔是由 M_1 和 M_2 镜构成的色心激光器的腔，称为主腔；另一个是由单模保偏光纤构成的附腔，其中 M_2 和 M_3 镜反射率≃100%，M_0 镜反射率≃70%，起耦合和输出作用。M_3 镜使保偏单模光纤成为激光器反馈回路的一部分，反馈回路的光纤又称为控制光纤。采用双折射调谐板 B 进行调谐，它是厚为 1—4mm 的兰宝石，调谐范围为 1.4—1.6μm。分束镜 S 的反射率≃50%。整个实验布局如图 7-6-1 所示。

上述的孤子激光器工作过程如下：首先由色心激光器产生脉冲激光，通过控制光纤，脉冲激光的脉宽被压缩，它反馈回主腔进一步被受激放大；放大后的脉冲激光再一次通过控制光纤被压缩，然后再反馈回主腔，如此循环下去，直至形成光学孤子。

激光器进入稳定工作状态时，脉冲激光在腔内往返传播一周再回到原处时，应与原来状态相同，即应满足(7-5-10)式和(7-5-11)式。由(7-5-11)式看出，通过改变控制光纤长度 L，可以控制光学孤子的脉宽。这是与通常的锁模激光器完全不同的。(7-5-11)式表示的是二阶光学孤子情形，在上述的孤子激光器中，在实验上观

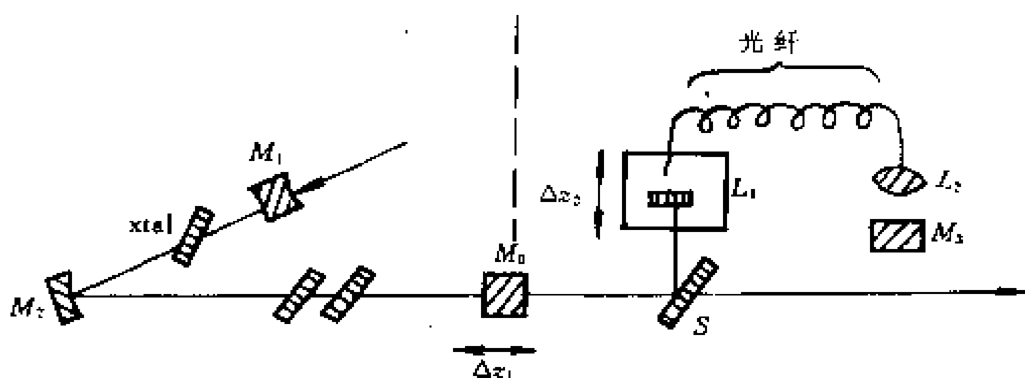


图 7-6-1　孤子激光器

察到的是二阶光学孤子，脉宽可达到皮秒，甚至飞秒。

实验发现孤子激光器的输出出现光学孤子与宽脉冲的无规交替，所以存在孤子激光器的稳定性问题。这种不稳定性来源于控制光纤腔，由于附腔反射镜的振动、漂移等，造成工作参数的随机变化，使从光纤反馈回主腔的脉冲激光与主腔振荡的脉冲激光发生相位差，破坏了同步。可通过外加伺服系统控制附腔的腔长，使孤子激光器稳定地运转。

实验发现当孤子激光器的光纤中的光功率 $P>P_1$ 时，在光纤中传输的光学孤子的能量，从高频向低频转移，在光学孤子频谱的低频端出现一个小峰，此称光学孤子的自频移现象。频移量 $\Delta\nu$ 与光纤中的平均功率的平方成正比，所以 $\Delta\nu\propto 1/\tau_c^4$。研究自频移现象，有利于得到频率稳定的孤子激光器。

可以采用激光器的半经典理论研究孤子激光器的运转特性。图 7-6-1 所示的孤子激光器，在理论上可以双腔模型进行讨论：同步泵浦的色心激光器组成的主腔和光纤组成的外腔。双腔理论模型如图 7-6-2 所示。图上的 B 表示双折射调谐板。关于光纤中的光的电场用(7-4-8)式表示的非线性薛定谔方程描写；主腔用通常的麦克斯韦-布洛赫方程(5-3-12)(5-3-13)和(5-3-14)式描写。关于主腔中光的电场方程(5-3-12)式中右端损耗项，若采用主动锁模代表同步泵浦的锁模过程，γ_c 可表示为 $\gamma_c=\gamma_0+F_m(1-\cos\omega_m t)$，$\omega_m$

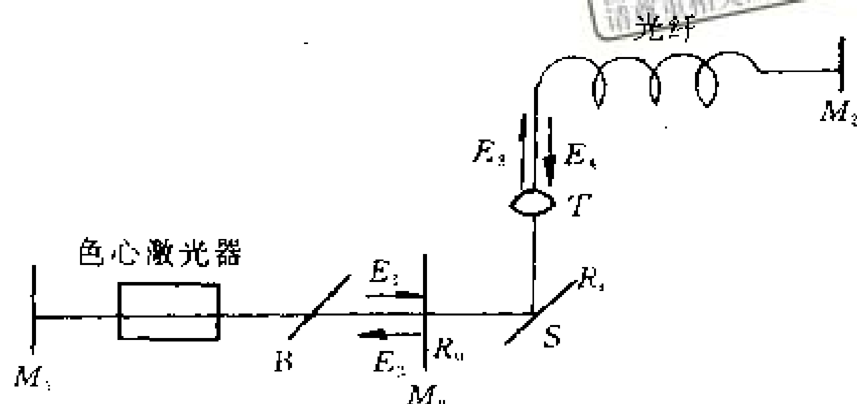


图 7-6-2　孤子激光器的双腔模型

$=2\pi c/L_1$，是调制频率，L_1 是主腔的腔长，F_m 是调制振幅。主腔与光纤腔的边界条件为：

$$E_1 = R_0E_2 + (1 - R_0^2)^{1/2}R_sTE_4e^{i\phi} \qquad (7\text{-}6\text{-}1)$$

$$E_3 = (1 - R_0^2)^{1/2}TE_1 + R_s^2R_0T^2E_4e^{i\phi} \qquad (7\text{-}6\text{-}2)$$

上式中 E_1 是在 M_0 处色心激光器的激光的电场，E_2 是从 M_0 进入色心激光器的光场，E_3 是进入光纤的光的电场，E_4 是从光纤反馈回来的光的电场，R_0 和 R_s 分别表示 M_0 镜和 S 镜的反射系数，T 是透镜 L 的透射系数，ϕ 是 E_1 与 E_4 之间的相位差。调整 M_0 位置，使 E_1 与 E_4 达到同位相迭加，保证激光器稳定运转。此外，对主腔内的双折射调谐板可以采用具体形式的传输函数表示。这样，就可以使用计算机模拟计算，得到光学孤子解[12]。

二、光纤喇曼孤子激光器

1987 年卡夫卡（J. D. Kafka）等人研制成光纤拉曼孤子激光器[13]，它是光纤喇曼激光器的进一步发展。泵浦光在光纤中产生受激喇曼散射时出现非线性，通过交叉相位调制补偿光纤的群速色散，在这里自相位调制的作用却很小。目前的光纤喇曼孤子激光器，一般采用环式结构，进入光纤中的泵浦光脉冲，在光纤中因受激喇曼散射产生斯托克斯光场，被泵浦光交叉相位调制，形成啁啾，从而光脉冲被压缩。被压缩的斯托克斯光脉冲经反馈再进入光

纤，产生喇曼散射增益，如此循环往返，形成光学孤子。

光纤喇曼孤子激光器的具体结构形式，目前有两种，其中的一种形式只用一种光纤，类似于单光纤压缩，如图 7-6-3 所示。由 Nd^{3+} ：YAG 锁模激光器产生的光脉冲，经双色反射镜 L 耦合进入光纤，在受激喇曼散射过程中产生的斯托克斯光，波长处于光纤的负群速色散区，在产生受激喇曼散射获得增益过程中，由交叉相位调制产生啁啾，将光脉冲压缩，M_2 镜引出输出，同时将反馈回的光经双色反射镜再耦合进入光纤。为达到同步，应将光纤回路的光程调节到泵浦激光器腔长的整数倍。这种单光纤结构的光纤喇曼孤子激光器，泵浦光处于正群速色散区，信号光处于负群速色散区，这样可以增加相互作用距离。

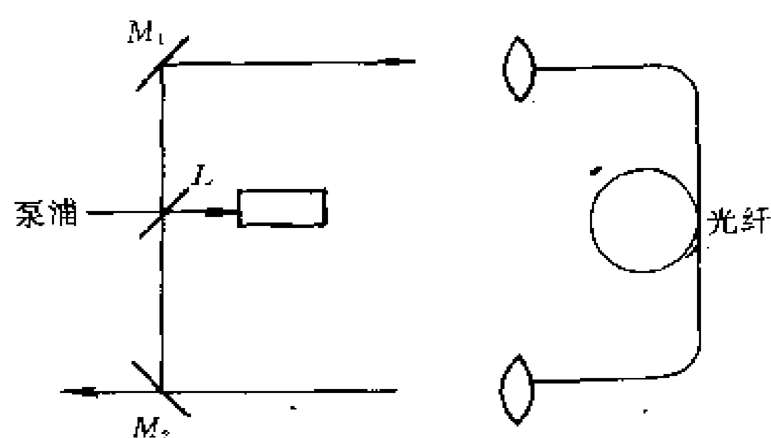


图 7-6-3　光纤喇曼孤子激光器

光纤喇曼孤子激光器的另一种结构形式是采用两种光纤耦合，类似于全光纤压缩，如图 7-6-4 所示。这两种光纤有不同的作用，在增益光纤中，受激喇曼散射的斯托克斯光工作在正群速色散区，光纤中的光脉冲在此产生啁啾并获得增益；在成形光纤中，斯托克斯光工作在负群速色图区，在这里啁啾得到补偿，光脉冲被压缩，再反馈到增益光纤中，如此往复下去。

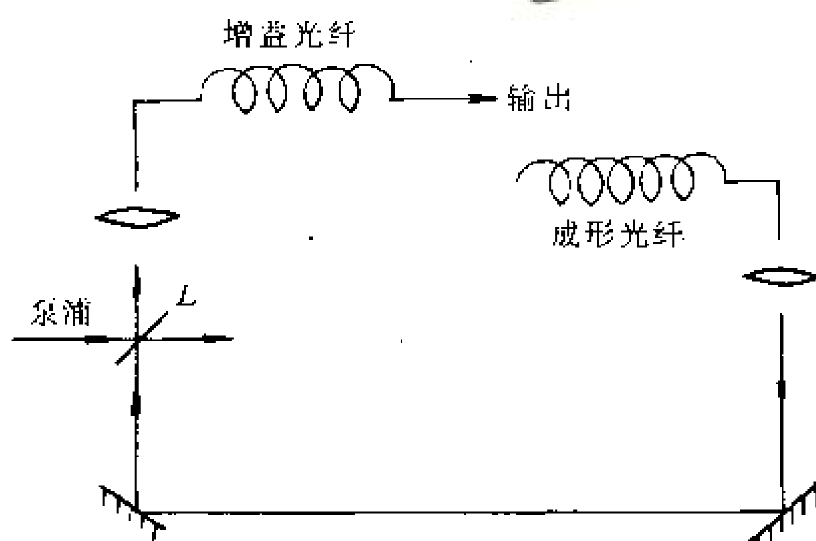


图 7-6-4 双光纤耦合喇曼孤子激光器

三、铒光纤孤子激光器[14]

铒光纤孤子激光器中的铒光纤，既起激光器工作物质的作用，又起压缩光脉冲和形成光学孤子的作用。Er^{3+} 的激光高工作能级寿命较长，可使用 Nd^{3+} ：YAG 激光器的倍频激光等多种激光光源进行泵浦，使铒离子产生激光。适当的选择泵浦功率，铒光纤的非线性光学效应与群速色散效应可刚好相互补偿，获得基阶光学孤子。若泵浦功率较低，则群速色散起主要作用，这时光脉冲展宽；若泵浦功率较高，引起高阶光学孤子的分裂，导致传输的光脉冲出现基座。这种光纤孤子激光器，不必如本节开头所述的那样使用色心激光器。

参 考 文 献

[1] Feher J. phys. Rev. Vol 109,1958,221

[2] Самарчев В В и Усманов Р Г. ЖЭТФ. ТОМ 72,1977,1702

[3] Hasegawa A and Tappert F. Appl. phys. Letters, Vol 23,

1973，142

[4] Mollenauer L F et al. phys. Rev. Letters，Vol 45，1980，1075

[5] Hasegawa A and Brinkman W F. IEEE J. Quantum Electronics. Vol. QE-16，1980，694

[6] Hasegawa A and Yuji Kodama. Proc. IEEE，Vol 69，1981. 1145

[7] 钟卫平，李中辅. 量子电子学. Vol 10，1993，62

[8] 黄念宁，陈宗蕴. 光纤孤子理论基础，武汉大学出版社，1991

[9] Junkichi Satosuma and Nobuo Yajima. Supplement of the Progress of Theor. phys. No55，1974. 284

[10] 谭微思. 中国激光。Vol 14，1987，625

[11] Mollenauer L F an Stolen R H. Opt. Letters，Vol 1，1984，13

[12] Berg P et al. phys. Rev，A. Vol 35，1987. 4167

[13] Kafka J D et al. Opt. Letters. Vol 12，1987，181

[14] Smith K et al. Electron Letters，Vol 26. 1990，1149；Vol 27，1991，244

第八章 无粒子数反转光放大

原子状态相干和无粒子数反转光放大，是最近几年新兴起的量子光学的研究领域，本章主要研究无粒子数反转光放大的基本原理，结合具体方案阐述研究无粒子数反转光放大过程的理论体系和分析方法，最后讨论有关无粒子数反转光放大的实验。

§8-1 引 言

自从1960年人们研制成功第一台激光器以来，关于粒子数反转分布的概念已相当普及，因为它是实现激光器运转的必要条件。实际上，最早在实验上实现反转分布的是普赛尔(E. M. Purcell)和庞德(P. V. Pound)，他们在1950年观察到核自旋系统的反转分布。1951年，前苏联的法卜利坎特(Ф. А. Фабрикант)在专利中提出利用粒子数反转分布机制受激放大电磁辐射的建议。1954年实现了微波段电磁辐射的受激放大，研制出微波段量子放大器(Maser)。随后，将粒子数反转分布机制推广到光波段的受激放大，研制成种种激光器。现今，人们可以使用光泵激励、放电激励、化学反应激励等等一系列的方法，非常熟练地使原子、分子和离子实现粒子数反转分布状态。利用粒子数反转机制，已在几万个波长上实现受激辐射。现今的激光已成为产业，由于激光科学技术的发展，使人们进入光电子时代。在这些过程中，不能不说粒子数反转分布的实现，起到了相当重要的作用。

但是，与此同时人们也一直在探索实现无粒子数反转分布放大光的可能性。这是因为一般而言，泵浦功率与被放大的电磁辐射

波长的三次方成反比。随着被放大的电磁辐射波长的缩短，要求庞大的泵浦功率，目前的实验室 X 激光器即属这种情形。所以在短波长（软 X 射线，X 射线和 γ 射线）方面，利用粒子数反转分布机制研制激光器，遇到了一定的实际困难。此外，原子、分子和离子由于能级性质等原因，能级间难以形成粒子数反转分布的，实际上是大量的。由此可见，探索无粒子数反转光放大的机制，是有重要的实际意义的。

下面作一些分析，目前的激光器都是采用粒子数反转分布机制，实现光的放大和振荡。这是因为在通常情形下，辐射场与原子系统相互作用时，总是同时存在自发辐射、受激辐射和受激吸收三种过程。其中，为了突出受激辐射，则要求在辐射场与原子系统相互作用时，受激辐射过程应压倒受激吸收过程，对于图 8-2-1 所示的二能级原子系统而言，则有

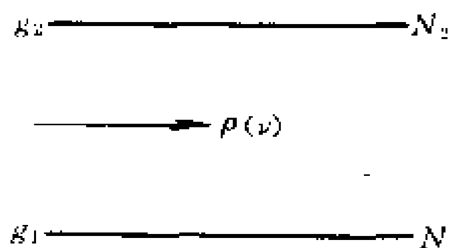


图 8-2-1

$$B_{21}\rho(\nu)N_2h\nu\mathrm{d}t \geqslant B_{12}\rho(\nu)N_1h\nu\mathrm{d}t \qquad (8\text{-}1\text{-}1)$$

上式中 B_{21} 和 B_{12} 分别是原子的受激辐射爱因斯坦系数和受激吸收爱因斯坦系数，$\rho(\nu)$ 是光辐射场能量密度，N_2 和 N_1 分别是高能级和低能级的粒子数密度，$h\nu$ 是光子能量，$\mathrm{d}t$ 是光与原子相互作用的时间。由上式得到

$$B_{21}N_2 \geqslant B_{12}N_1 \qquad (8\text{-}1\text{-}2)$$

根据爱因期坦系数关系：$B_{21}g_2=B_{12}g_1$，g_2 和 g_1 分别是原子的高能态和低能态的简并度，则得到粒子数反转条件

$$N_2 \geqslant \frac{g_2}{g_1}N_1$$

或者

$$\Delta N = \frac{N_2}{g_2} - \frac{N_1}{g_1} \geqslant 0 \qquad (8\text{-}1\text{-}3)$$

的结果。就是说，当辐射场与原子相互作用时，为使受激辐射过程压倒受激吸收过程，应使原子系统处于粒子数反转分布状态。

由激光物理学知道[40]，粒子数反转分布是激光器产生激光的必要条件，产生激光的充分又必要的条件是辐射场在粒子数反转分布的介质中的增益大于或等于损耗。

由上述分析看出，使用有关的物理效应，消除或减少辐射场的吸收，从而实现无粒子数反转光放大。为了实现无粒子数反转光放大，目前已经提出的有利用原子发光和吸收光时的反冲效应，强相干光与原子相互作用时产生的相干俘获效应，法诺干涉效应，原子状态相干效应以及缀饰态激光器等原理方案，研究内容和范围正在不断扩大。目前还很难对它们进行详细的分类。

早在 1963 年，马居斯(D. Marcuse)就明确地提出使用无粒子数反转系统，实现 X 射线和 γ 射线的放大。他提出的方案是运动的原子核在产生和吸收 X 射线、γ 射线时，由于原子核反冲效应，使吸收谱与发射谱错开，不相重合，从而消除吸收的影响，直接使用无粒子数反转系统放大和受激发射 X 射线和 γ 射线。这就是利用发射谱和吸收谱的都普勒加宽反冲分裂，实现无粒子数反转光放大的原理[1-3]。

对于在强相干光场与二能级原子近共振作用时二能级原子的吸收和发射的理论分析表明[4,5]，这时的二能级原子系统在无粒子数反转分布情形下，可以实现光放大，放大光的频率与驱动二能级原子的强光场的频率非常接近。上述的理论分析已为实验证实[6]。

真正引起近年来对无粒子数反转光放大研究兴趣的是阿希普金(V. G. Arkhipkin)和亥勒(Yu. I. Heller)1983 年提出的方案。他们提出对于在其中具有一个分立电离态二能级系统的连续态作为高能态的离子，因为吸收过程出现法诺(U. Fano)干涉[8]，吸收谱与发射谱不再对称，这样可以消除或部分消除吸收，不必要求粒子数反转分布即可实现光的放大。由此开僻出了利用原子状态相干效应，实现无粒子数反转光放大的研究领域。1989 年哈里斯(S. E.

Harris)在这方面迈出了一步，他提出两个相邻的高能级衰减到同一个连续态的系统，这两个上能级由于自游离衰减到同一个连续态，因为吸收过程中存在法诺干涉，发射过程不存在这种干涉，从而实现无粒子数反转光放大[9]。在哈里斯提出的原理方案基础上，随后又提出一些具体方案[10~14]。现已基本形成一类，即具有两个邻近的高能级和一个低能级的三能级原子系统实现无粒子数反转光放大的方法，称此为 V 型方案。

利用原子状态相干效应实现无粒子数反转光放大的另一类方案是采用具有两个相邻的低能级和一个高能级的原子系统，是由俄罗斯的柯恰洛夫斯卡娅(O. A. Кочаровская)等人首先提出来的[20,21]。关于原子两个相邻的能态之间的相干效应，可以通过外加低频场或微波场实现[21,22]，也可以由喇曼过程将两个相邻低能级耦合起来[24]。由此形成了简单 Λ 型和双 Λ 型方案[23]。

当强的光场与原子的两个相邻的低能态相耦合时，原子可以产生缀饰态，在此基础上人们提出了缀饰态激光器和缀饰态微波量子放大器的原理方案[25—29]。

1991 年哈里斯等人依据他的原理方案，在强相干场驱动下的锶原子束原子蒸汽中，实验观测到光透明现象[34]。1992 年人们在钠原子蒸汽中，实验观测到在强相干光场驱动下，通过喇曼过程，光吸收明显减少并获得增益[35]，分析表明观测到的是缀饰态激光器的光放大现象。

在这一章，我们将对已经提出的原子状态相干和无粒子数反转光放大方案进行原理分析；研究无粒子数反转光放大系统的理论体系，最后讨论有关的实验结果。

§8-2 反冲型无粒子数反转光放大原理

原子在吸收和发射光子时，由于反冲效应可以使原子吸收光

子的频率与发射光子的频率，不再相同，从而消除吸收的影响[1,2]。

设一个二能级原子质量为 m，以速度 v 运动，分析该二能级原子在与光相互作用过程中，由于运动速度的影响，它吸收光的频率与发射光的频率。当与光相互作用时，原子吸收一个动量为 $\hbar k$、能量为 $\hbar\omega$ 的光子，在原子的吸收过程中，光子能量的一部分被原子外层电子吸收，电子从低能级跃迁到高能级。光子的另一部分能量，则转化为原子的动能。因此，在吸收过程中，光子为原子提供的总能量 $\hbar\omega_a$，按能量守恒，应满足下列关系

$$\hbar\omega_a = \hbar\omega_{12} + \frac{1}{2}m(\Delta v)^2 \tag{8-2-1}$$

上式中 Δv 是原子与光子非弹性碰撞前后的速度变化，在此碰撞过程中，由动量守恒得到

$$\hbar k = m\Delta v \tag{8-2-2}$$

所以

$$\frac{1}{2}m(\Delta v)^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{8-2-3}$$

将(8-2-3)代入(8-2-1)式，得到

$$\omega_a = \omega_{12} + \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{8-2-4}$$

而当原子发射光子，同时原子被反冲，因而获得部分动能，这些能量由原子外层电子跃迁能量 $\hbar\omega_{12}$ 提供，则由能量守恒得到

$$\omega_e = \omega_{12} - \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{8-2-5}$$

由(8-2-4)式和(8-2-5)式看出，由于反冲效应，使原子吸收和发射光子的频率不相同，因此吸收和发射谱不再对称，可作为无粒子数反转光放大的根据。但是由上式看出，在可见光波段这种效应很小，很难利用；只有在 X 光和 γ 射线波段，这种反冲效应才明显。

§8-3 具有两个相邻高能级原子系统的无粒子数反转光放大原理

在这方面最早提出的方案是使用法诺干涉效应。当原子的一个或几个分立的电离态向连续态跃迁时，连续态与电离态之间发生状态相干，在吸收谱的某些频率范围内，吸收减少到零，吸收谱线型轮廓不再对称，此即法诺干涉[8]。阿希普金和亥勒根据法诺干涉，提出利用自游离或类共振自游离的吸收谱和发射谱在线型的形状上不同，实现无粒子数反转光放大的原理方案[7]。由于到连续态的共振跃迁通道和非共振跃迁通道的干涉，吸收谱具有反对称形状，在某些频率范围，自游离或吸收几率为零。根据法诺干涉理论，对于气体工作物质情形，吸收截面为

$$\sigma = \sigma_0\left[1 - d + \frac{(\Delta' + F)^2 d}{1 + \Delta'^2}\right] \qquad (8\text{-}3\text{-}1)$$

上式中 σ_0 是无自游离状态的连续态的光吸收截面，$\Delta' = (\omega - \omega_{ai})/\gamma$，$\omega_{ai}$是自游离状态频率，$\gamma$ 是共振谱线半宽度，F 是自游离线型的法诺参数，d 表示各种游离通道的干涉程度，$d \leqslant 1$。对于只有一种连续态情形，$d = 1$。由上式可见，在 $\Delta' = -F$ 处，得到光吸收截面为零。在法诺干涉效应中，这方面的例子是处于 $2s2p$ 激发态的氦原子，在 $\lambda \approx 20.6$nm 范围内的自游离共振[7]。

对于等离子体工作物质，通过泵浦有可能形成稳定的粒子数布居状态。现在研究总的吸收，它包括在断续状态 m 和自游离态 i 之间的跃迁频率为 ω 的共振吸收和有粒子数布居的能级 i 到更高的连续态的非共振吸收。吸收系数 $\alpha(\omega)$ 为

$$\alpha(\omega) = \alpha_0\left[1 - D + \frac{(\Delta + F)^2 - (1 + F^2)\dfrac{n_i}{n_m}}{1 + \Delta^2}\right] \qquad (8\text{-}3\text{-}2)$$

式中 $\alpha_0=\sigma_0 n_m/\Sigma$，$D=\Gamma d\Sigma\leqslant 1$，$\Sigma=(1+\sum_j \alpha_j/\sigma_0 n_m)^{-1}$，$\alpha_j$ 是从能级 j 跃迁的吸收系数，Σ 表示布居数能级对非共振吸收的贡献部分，$\Gamma=\Gamma_{ii}/(\Gamma_{im}+\Gamma_{ii})$，$\Gamma_{im}$表示 i、m 能级跃迁的碰撞和自发辐射的半宽度之和，$\Delta=(\omega-\omega_{as})/(\Gamma_{im}+\Gamma_{ii})$。由(8-3-2)式看出，当

$$\frac{n_i}{n_m}>\frac{(1-D)(1+DF^2)}{D(1+F^2)} \tag{8-3-3}$$

时，在 $\Delta=-DF$ 处，吸收系数成为负的，即出现光放大。(8-3-3)式表明，在 $D>1/2$，对于 F 的任何值，在能级 i 和 m 上的粒子数 $n_i<n_m$(无粒子数反转)情形下，光的放大是可能的。在不同的 n_i/n_m 情形，吸收系数与频率之间的关系，如图 8-3-1 所示，只在很窄的光谱范围内出现无粒子数反转光放大。(8-3-2)式与 n_i/n_m 成正比的项，可解释为自游离能级的受激辐射项，它是洛仑兹函数形式的，所以发射谱没有反对称性。

在实验上可以使用强的激光场，造成原子的自游离状态。

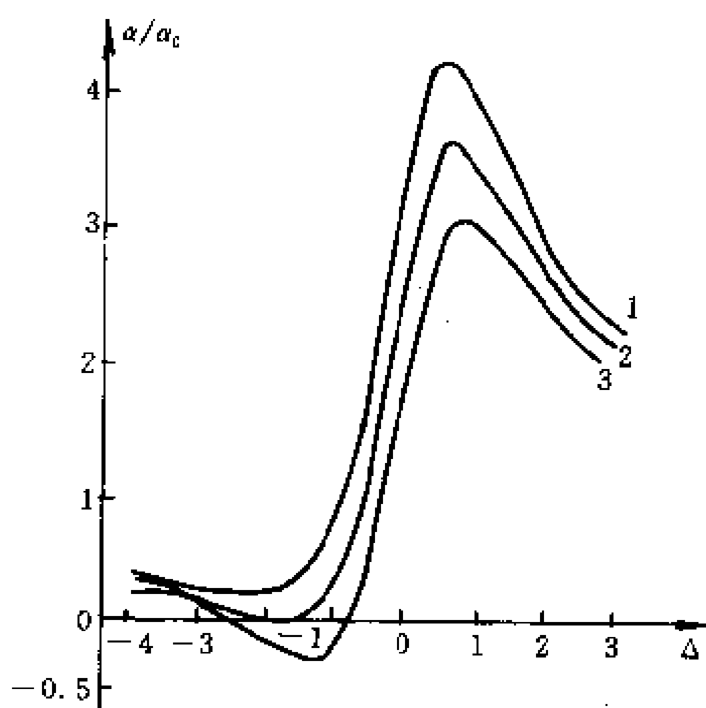


图 8-3-1 吸收曲线

(1) $n_i/n_m=0$ (2) $n_i/n_m=0.2$ (3) $n_i/n_m=0.4$

上述的原理方案可以具体推广为在低能级原子的吸收轮廓内，造成对吸收有破坏作用的原子状态相干，在高能级原子的发射轮廓中不存在这种相干。对于图 8-3-2 所示的能级系统，能级|1〉是低能级，能级|2〉和|3〉是相邻的高能级。假设能级|2〉和|3〉都是寿命宽度，分别以 γ_2 和 γ_3 表示衰减速率，通过俄歇过程或者自游离过程、光游离过程、燧道效应以及自发辐射衰减到同一个连续态。对于自游离，这种连续态是一个离子和一个电子。初始时在能级|1〉上的原子，由于它们有几个量子力学途径达到同一个终止的连续能级，在吸收轮廓中存在法诺干涉。对于图 8-3-3 所示的情形，初始时在能级|2〉上的原子，不存在这种干涉。在哈里斯研究的

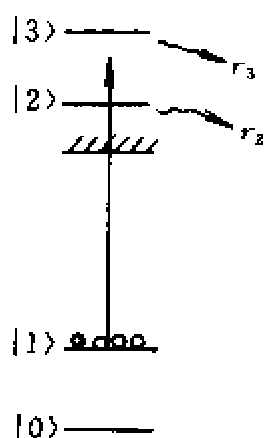


图 8-3-2

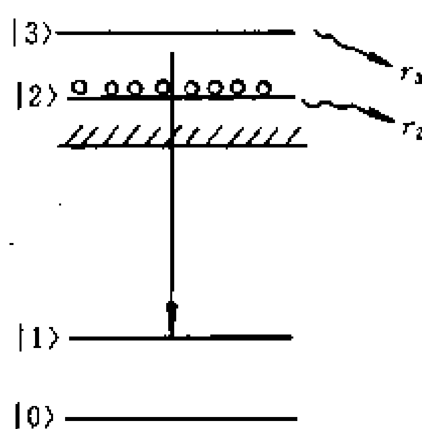


图 8-3-3

这类寿命加宽的两个相邻高能级自游离衰减到同一个连续态的原子系统[9,10]，由于出现法诺干涉，使受激辐射谱线线型与吸收谱线线型不同，在某些频率上，吸收速率为零。而发射速率不为零，所以可以实现无粒子数反转光放大。

在上述研究基础上，里拉斯（A. Lyras）等人具体分析了图 8-3-4 所示的系统[11]。图中|1〉为基态，激发态|2〉和|3〉嵌在连续态|c〉中。这两个激发态由于构型相互作用，即自游离，耦合到连续态。考虑到泵浦作用，使用密度矩阵方程进行分析，表明自游离态有一个反对称形状的吸收谱，在法诺干涉的最小值处，甚至泵浦速率低于自游离速率时，也存在增益。

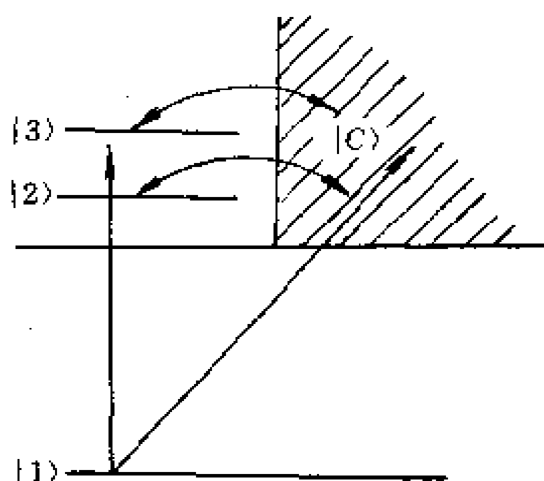


图 8-3-4

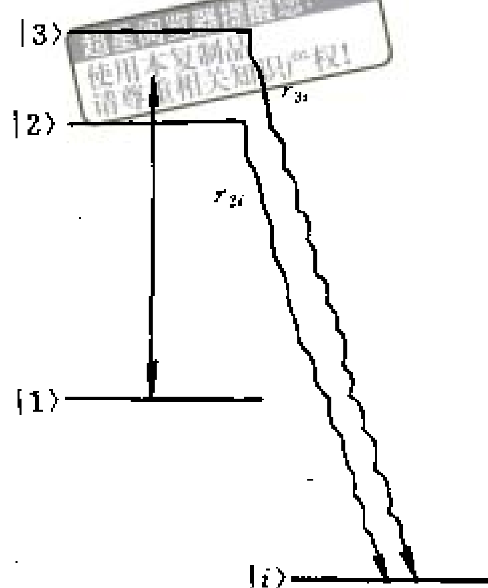


图 8-3-5

衣玛茅格鲁(A. Imamoğlu)将哈里斯提出的原理方案推广为如图 8-3-5 所示的能级系统。图中低的原子状态|1⟩通过频率为 ω_L 的探测激光场与两个高能级|2⟩和|3⟩耦合，高能态|2⟩和|3⟩通过自发衰减到单个的原子状态|i⟩，首先讨论这个系统的吸收。对于一个长时间处于低能态的原子与弱的单色入射光场相互作用，通过喇曼散射过程进入状态|i⟩。在此过程中，原子是通过两个中间状态|2⟩和|3⟩发生喇曼散射的，所以总的散射几率(完全等于吸收几率)中含有干涉项，它将使吸收谱线线型中，出现零的吸收。其次讨论这个系统的发射过程。经过泵浦，能级|1⟩上的原子进入状态|2⟩，由于能级|2⟩和|3⟩通过衰减过程耦合，能级|3⟩也被激发，最后通过受激跃迁回到能级|1⟩，发射谱线轮廓与吸收谱不相同，所以采用图 8-3-5 所示的系统，也可以实现无粒子数反转光放大。

采用光与原子相互作用的量子理论，得到原子各状态的波函数方程为[12]

$$\frac{\partial}{\partial t}A_1(t) = \Omega_{12}A_2(t) + \Omega_{13}A_3(t) \qquad (8\text{-}3\text{-}4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A_2(t) + \mathrm{i}\delta_{2L}A_2(t) = \Omega_{21}A_1(t) + \Omega_{23i}A_3(t) \qquad (8\text{-}3\text{-}5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A_3(t) + \mathrm{i}\delta_{3L}A_3(t) = \Omega_{31}A_1(t) + \Omega_{32i}A_2(t) \quad (8\text{-}3\text{-}6)$$

在上式中，表示相互作用的量

$$\Omega_{12} = \Omega_{21} = \mathrm{i}g_{12k_L}\sqrt{n_{k_L}} \quad (8\text{-}3\text{-}7)$$

$$\Omega_{13} = \Omega_{31} = \mathrm{i}g_{13k_L}\sqrt{n_{k_L}} \quad (8\text{-}3\text{-}8)$$

$$\Omega_{23i} = \Omega_{32i} = -\frac{\sqrt{\gamma_{2i}\gamma_{3i}}}{2}\frac{|\beta|}{\beta} \quad (8\text{-}3\text{-}9)$$

耦合系数

$$g_{nm\sigma k} = e\sqrt{\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0\hbar V}}\hat{l}_{\sigma k}\cdot\mu_{nm} \quad (8\text{-}3\text{-}10)$$

式中

$$\mu_{nm} = \langle n|\boldsymbol{r}|m\rangle, \quad \omega_{mn} = \omega_m - \omega_n$$

γ_{3i}和γ_{2i}分别是状态$|3\rangle$和状态$|2\rangle$的辐射衰减速率。若出现相干效应，必要求状态$|3\rangle$和$|2\rangle$是相邻的能态，即$\omega_{2i}\simeq\omega_{3i}$，$\mu_{2i}=\beta\mu_{3i}$，$\beta$是一个标量。上式中$n_{k_L}$是激光模式内的光子数，$l_{\sigma k}$是光子的偏振矢量，$\omega_{k_L}$是激光频率，$V$是规格化体积。(8-3-4)—(8-3-6)式中的δ_{2L}和δ_{3L}分别表示

$$\delta_{2L} = \omega_2 - \omega_{k_L} - \mathrm{i}\frac{\gamma_{2i}}{2} \quad (8\text{-}3\text{-}11)$$

$$\delta_{3L} = \omega_3 - \omega_{k_L} - \mathrm{i}\frac{\gamma_{3i}}{2} \quad (8\text{-}3\text{-}12)$$

由(8-3-4)—(8-3-6)式得到的吸收谱线和发射谱线形状彼此不相同[9]，特别是当将探测光频率调谐到使$\Omega_{21}(\omega_3-\omega_{k_L})\sqrt{\gamma_{2i}}=-\Omega_{31}(\omega_2-\omega_{k_L})\sqrt{\gamma_{3i}}$时，吸收速率为零，而发射速率不为零[10]，所以，图8-3-5所示的系统，实现无粒子数反转光放大是可能的。

上述分析表明，这里已将使用自游离能级的干涉消除吸收影响的原理，推广到两个靠得很近的具有相同的J和m_J量子数并

且都衰减到同一个单一的原子能级的系统。

在上面各原理方案基础上，提出的变形的哈里斯方案如图 8-3-6 所示[13]。原子系统的三个断续能级，其中 $|1\rangle$ 为基态，$|2\rangle$ 和 $|3\rangle$

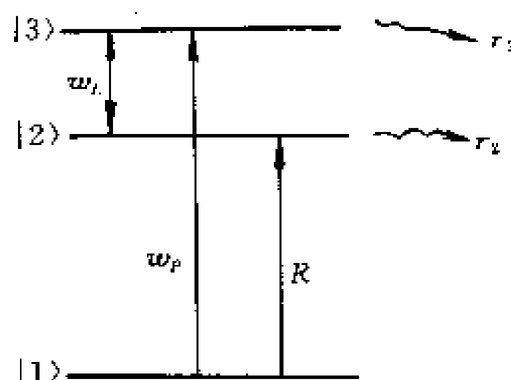


图 8-3-6

能态被外加的频率为 ω_L 的强光场耦合，探测光场频率为 ω_P，耦合场颇强于探测光场。以泵浦速率 R 进行非相干泵浦，两个高能级 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 上的原子，分别以 γ_2 和 γ_3 衰减速率辐射衰减到能级 $|1\rangle$。通过自发衰减建立原子状态相干。$|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 能态有相同的总角量子数 J 和 m_J，在中间状态 $|2\rangle$ 为亚稳态情形，在无粒子数反转情况下，可得到较高的增益。在本章的第六节，作为例子，将对这种方案进行理论上分析。

若原子的两个相邻高能级为准退化能级，则可构成如图 8-3-7 所示的原理方案[14-18]。能级 3 和 2 是分裂的两个激光高能级，3→1 跃迁和 2→1 跃迁过程产生光放大。能级 4 和 0 是两个辅助能级。有两种可能的方式造成状态 2 和 3 之间的相干混合，一种是借助能级 5，将能态 2 和 3 相干混合；另一种是使用加在 2 和 3 能级间的高频场或者微波场，相干混合 2 和 3 状态，这种情况可以图 8-3-8 表示，图中 ω_0 表示外加的高频场或者微波场的频率。从非线性光学来看，在原子系统中进行非线性光学——微波过程，提供了被放大激光信号的受激发射[17,18]。

上面讨论了几种具有相邻高能级的原子系统，实现无粒子数

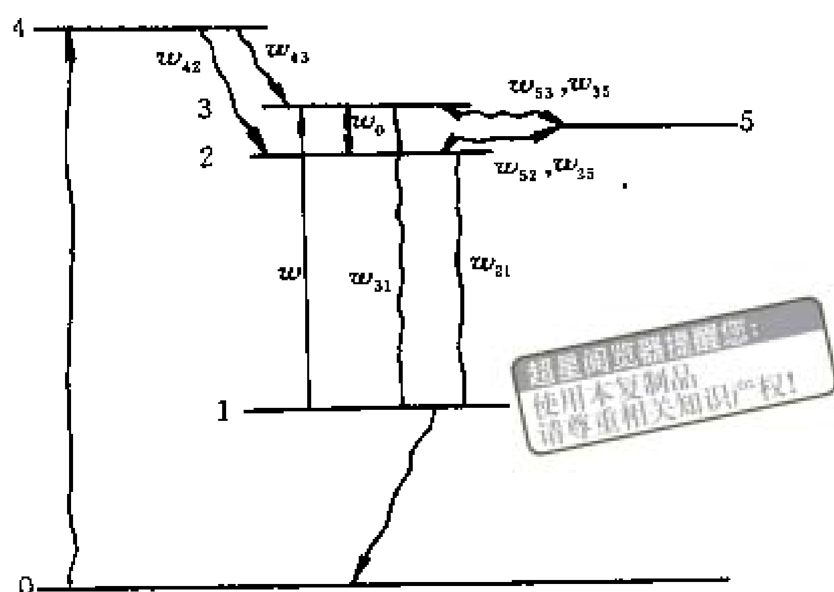


图 8-3-7

反转放大光的原理方案，随着研究的深入，这些方案还会演化。从物理上看，原子系统吸收被降低的根本原因是低能级粒子的宏观电级化强度的虚部为零，因为实数的宏观电极化强度不影响激光的振幅，所以不存在低能级吸收。原子两个相邻高能态与连续态之间的耦合，一是建立两个相邻高能态之间相干，另一是使宏观电极化强度成为实数的，工作物质的增益来自原子状态的相干性[19]。

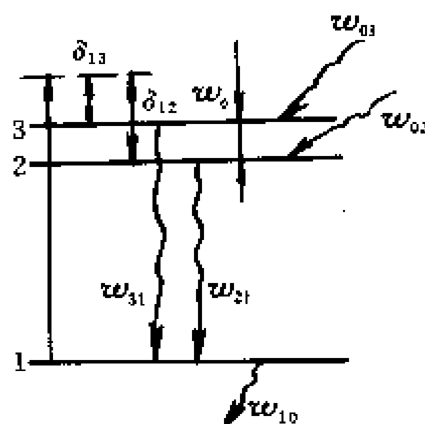


图 8-3-8

§ 8-4 具有两个相邻低能级原子系统的无粒子数反转光放大原理

一、利用相干俘获效应

对于如图 8-4-1 所示的具有两个相邻低能级和一个高能级的原子系统，人们知道[37,39]，当强的相干光同它们相互作用时，可将原子的高能级与两个低能级相干地耦合起来，原子被束缚在两个低能态的叠加态上，这时原子系统对于光的吸收，将被减少，同时荧光强度也减少。原子两个低能态的线性叠加态的存在，使得高能态与叠加态之间不能感应跃迁，这是由于破坏性的相干造成的，所以称为俘获态。

当原子被俘获时，只要高能级存在一定的粒子数，从这样的系统抽取能量是可能的，当图 8-4-1 所示的光场 a、b 使原子数束缚在 $|2\rangle$ 和 $|1\rangle$ 状态的一个叠加态上，则被研究的弱的探测光场，通过该介质时，探测光场增益系数可以大于零，即无粒子数反转光放大是可能的。当然也可以事先制备含有这样的一个俘获态的原子样品，实现无粒子数反转光放大。

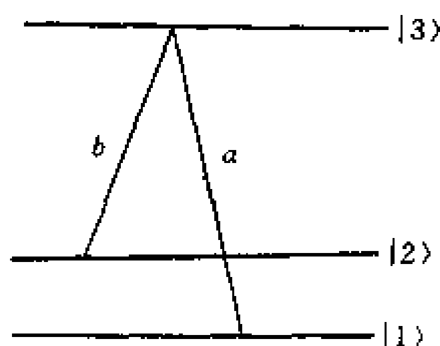


图 8-4-1

1988 年，奥尔加·柯恰洛夫斯卡娅(O. Kocharovskaya)等人最先提出使用图 8-4-1 所示的简单 Λ 型系统，利用相干俘获效应，实现超短光脉冲放大。分析表明。若以 ω_{21}表示能级 $|2\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间原子跃迁对应的光频率，则当 ω_{21} 为相干脉冲重复频率的整数倍，并且能级 $|2\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的相干弛豫时间足够长，大于能级 $|3\rangle$ 的寿

命时间时，实现超短光脉冲放大是可能的。

二、原子相邻低能级状态混合

将原子的两个相邻低能级进行状态混合，可以借助喇曼散射过程完成，如图 8-4-2 所示[22-24]。图中 $|d\rangle$ 为虚能级，在 $|d\rangle-|c\rangle$ 和 $|d\rangle-|b\rangle$ 之间加上两个单色强光场，通过虚能级 $|d\rangle$ 的喇曼过程，将两个相邻的能态耦合起来。

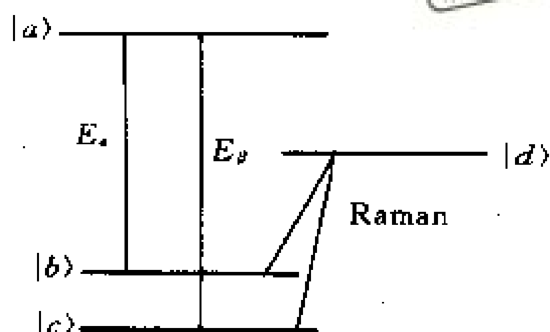


图 8-4-2

设能级 $|a\rangle$ 通过非相干泵浦（例如光泵或气体放电等）被微弱的激发，在碰撞起支配作用情形，当两个相邻低能级之间的纵向寿命时间 τ 远大于该原子系统 $|a\rangle$、$|b\rangle$、$|c\rangle$ 能级间的纵向、横向弛豫时间 T_1、T_2，而且拉比频率 Ω_R 满足关系：$T_1\tau|\Omega_R|^2\gg1$ 时，低能态之间的相干达到最大，拉比频率 $\Omega_R=\mu_{cd}\mathscr{E}_R/\hbar=\mu_{bd}\mathscr{E}_R/\hbar$，$\mathscr{E}_R$ 为在 $|d\rangle-|c\rangle$ 和 $|d\rangle-|b\rangle$ 上外加的单色强光场；同时，零级近似的密度矩阵元素为

$$\rho_{ab}^{(0)}=\rho_{ba}^{(0)}=-\frac{1}{2(1+RT_1)}=-\rho_{cc}^{(0)}=-\rho_{bb}^{(0)} \quad (8\text{-}4\text{-}1)$$

$$\rho_{aa}^{(0)}=\frac{RT_1}{(1+RT_1)} \quad (8\text{-}4\text{-}2)$$

式中 R 是从能级 $|c\rangle$ 或 $|b\rangle$ 的非相干泵浦速率。若设光场 $E_\alpha=E_\beta=E$，则被放大的光场随时间的变化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E=\frac{N\mu^2T_2\rho_{aa}^{(0)}}{1+2T_1T_2|\Omega_R|^2}E \quad (8\text{-}4\text{-}3)$$

式中 μ 是跃迁矩阵元。看出，光场的吸收被原子状态相干完全抵消。在碰撞起支配作用范围内，使用喇曼过程，可以在两个相邻低能级之间建立完全相干（$|\rho_{cb}|=\rho_{cc}=\rho_{bb}$），从而得到完全的无粒子数反转光放大。

三、外加微波场

对于图 8-4-3 所示的具有两个相邻低能级的三能级原子系统，通过非相干泵浦将原子泵浦到高能级 a 上，通过一个强的微波场共振地驱动两个相邻的低能级。这样，当一个原子从高能级 a 往两个低能级 b、c 跃迁时，总跃迁几率是 $a\to b$ 和 $a\to c$ 跃迁几率之和；而从两个低能级 b 和 c 往单一的高能级 a 跃迁时，跃迁几率为两个几率幅之和的平方[22]。可见，向上和向下跃迁之间存在反对称性，由于存在相消干涉，使无粒子数反转放大光成为可能。相干俘获是通过强的相干光场使原子产生相干的 ρ_{cb}，通过微波泵浦也可实现相干。

图 8-4-3 所示的系统可称为 $h+\Lambda$ 型系统，如图 8-4-4 所示。

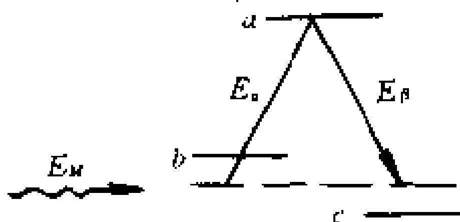


图 8-4-3

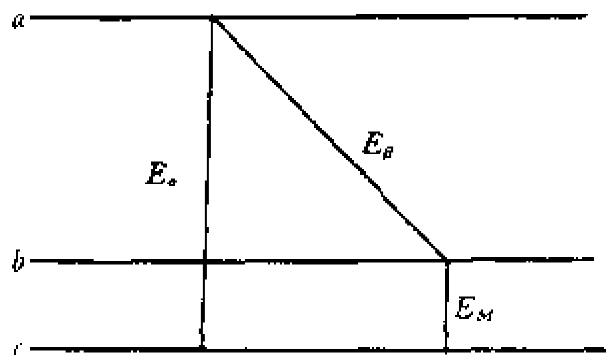


图 8-4-4

对于碰撞过程起支配作用的原子系统，设外加微波场振幅为 $\mathscr{E}_M$，对应 $a\to b$ 和 $a\to c$ 跃迁的激光场为 $\mathscr{E}_j=E_j\exp(\mathrm{i}\omega_j t+\mathrm{i}\phi_j)$，($j=\alpha$、$\beta$)，从能级 b 或 c 向能级 a 泵浦的非相干泵浦速率为 R，T_1 和 T_2 分别表示系统的纵向和横向弛豫时间，τ 表示两个相邻低能级之间的纵向寿命，若微波场的拉比频率 $\tau T_1|\Omega_M|^2=1$，其中 $\Omega_M=\mu_{cb}$

$\mathscr{E}_{\mu}/\hbar$，则采用半经典理论分析，通过求解密度矩阵方程组，得到表示原子状态 c 和 b 相干的密度矩元素 ρ_{bc} 的零级近似表示式为[24]

$$\rho_{bc}^{(0)}=\frac{\mathrm{i}}{4(1+RT_1)};\quad \rho_{aa}^{(0)}=\frac{RT_1}{1+RT_1}$$

$$\rho_{cc}^{(0)}=\frac{3}{4(1+RT_1)}=3\rho_{bb}^{(0)} \tag{8-4-4}$$

因为这里不存在 $|\rho_{bc}|=\rho_{bb}=\rho_{cc}$ 关系，所以对于这里的情形，状态相干效应没有完全抵消吸收。设 $E_{\alpha}=E_{\beta}=E$，光场随时间的变化关系为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overset{*}{E}=\frac{N\mu^2T_2}{1+T_2\Omega_M^2}\left[\rho_{aa}^{(0)}-\frac{1}{4}(\rho_{cc}^{(0)}+\rho_{bb}^{(0)})\right]E \tag{8-4-5}$$

式中 N 为单位体积内的原子数目，μ 为原子的电偶极矩。由上式看出，当

$$\rho_{aa}^{(0)}=\frac{1}{4}(\rho_{cc}^{(0)}+\rho_{bb}^{(0)})+\varepsilon' \tag{8-4-6}$$

式中 ε' 为一小量，即使在 $\rho_{cc}=\rho_{bb}=2\rho_{aa}$ 时，也存在增益，所以在低能级上的粒子数比 80% 稍少情形，光放大是可能的[24]。

§ 8-5　缀饰态激光器原理

前面讨论的原子系统能够进行无粒子数反转放大光，在于两个相邻低能态之间的相干。实际上，对于如图 8-5-1 所示的系统，也可理解为缀饰原子态的有粒子数反转的激光系统。

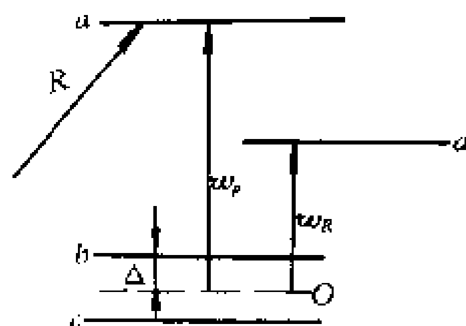


图 8-5-1

对于图 8-5-1 所示的四能级原子系统，原子的基态由两个相邻的能级 b 和 c 组成，由一个强的相干驱动光场（为了简单，以下简称

喇曼场)将它们与能级 d，电偶极地耦合起来；设能级 a 与能级 b、c 之间是电偶极允许跃迁，如以泵浦速率 R 将基态原子非相干泵浦到能级 a，但它同下面的能级不形成粒子数反转，则当有一个波长对应于能级 a 与能级 b、c 之间跃迁的微弱探测光，通过原子系统时，根据前面的讨论，可知将出现无粒子数反转光放大现象。

现在采用缀饰原子方法讨论这个问题。当喇曼驱动场的拉比频率颇大于原子衰减速率时，根据强光场与原子相互作用的缀饰原子法[31]，给出的缀饰原子的能级，其中前三个缀饰态可分别表示为 $|s\rangle$、$|r\rangle$ 和 $|t\rangle$，第四个与原来的状态 a 相重合。采用密度矩阵元素方程计算这四个能级上的粒子数与喇曼驱动场的拉比频率关系，结果如图 8-5-2上的曲线所示[25,26]。由图上曲线看出，随着喇曼场增加，能级 r 上的粒子数增加，而能级 s 和 t 上的粒子数减少。可见，对足够强的喇曼驱动场，甚至可抽空 s 和 t 能级上的粒子数，从而导致在能级 a 与缀饰态 s 和 t 之间的粒子数反转分布。这种粒子数反转分布的产生原因是由于足够强的喇曼驱动场造成的，而无须增加到高能级上的非相干泵浦速率。

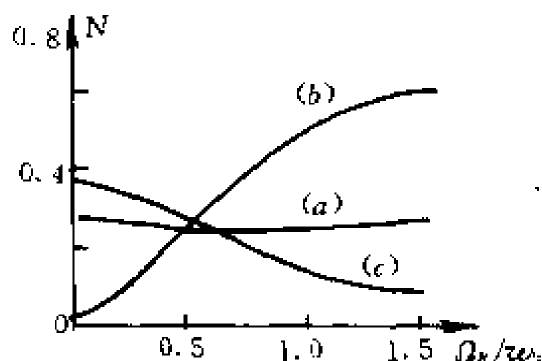


图 8-5-2　N—稳态粒子数，Ω_R/W_3—喇曼驱动场振幅
(a)能级 a，(b)能级 r；(c)能级 s 和 t

这样，图 8-5-1 所示的系统出现光的放大现象，也可解释为原子高能级 a 与缀饰态能级 s 和 t 之间的粒子数反转分布造成的。当然，实际上，在原来的未受扰动的能量状态之间，并没有发生粒子数反转分布。

于是人们提出预先制备出缀饰态原子，将它们注入到激光器谐振腔内，成为缀饰态激光器，缀饰态的制备，改变了原子的吸收和发射谱轮廓。分析表明，缀饰态激光器的运转特性与通常的单模激光器相同[27]。这方面的研究正在进行中[25]。

再举一个具体原理方案。人们知道，外场能使吸收谱出现场感生的极小值，例如可以通过外加直流电场在原子吸收谱轮廓中感生，从而实现无粒子数反转光放大，其中的一种原理方案如下。设系统有两个自游离态|3⟩和|2⟩，它们通过外加直流电场耦合起来，状态|2⟩通过构型混合耦合到未被扰动的连续态|E⟩，如图 8-5-3 所示。若以泵浦速率 R 将原子泵浦到能级|2⟩，当弱的探测光场同状态|E⟩和|2⟩与断续态|1⟩相耦合时，可实现无粒子数反转光放大。

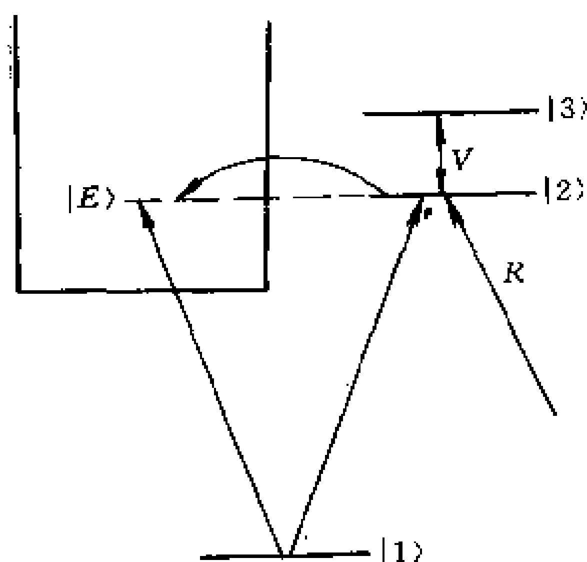


图 8-5-3 V—外加直流电场；R—泵浦速率

这是因为外加的直流场建立了新的吸收通道。由于不同的吸收通道的干涉，在吸收谱线轮廓内，产生新的直流场感生的极小值。实际上，外加直流场将两个自游离态混合产生新的状态，即缀饰态，例如|a⟩和|b⟩缀饰态。在缀饰态表象，在|1⟩→|a⟩，|1⟩→|b⟩，|1⟩→|E⟩跃迁中，可以吸收光子。而在发射谱轮廓内，也存在外加场感生的极小值，但是它与吸收谱轮廓内，外加直流场感生的极小值位置不同，从而消除吸收过程的影响，实现无粒子数反转光放大。

上面四节讨论了反冲型、具有两个相邻高能级的系统、具有两个相邻低能级的系统以及缀饰态原子系统，实现无粒子数反转光放大的原理。一般都要求原子具有三个或三个以上能级参与光场或微波场的作用，在此过程中同时将产生复杂的非线性光学现象。这是一个新的研究领域。出于对问题的讨论方便，这里在物理原理上进行了分类介绍，当然这种分类并不是十分严格的和必要的，仅仅是为了说明问题方便而已。以此作为基础，可以容易理解一些新的方案的物理原理，例如我们这里未作具体分析的阿嘎瓦(G. S. Agarwal)等人提出的利用自游离状态共振的喇曼跃迁实现无粒子数反转光放大的方案[30]等等。

§8-6 在原子状态相干介质中光的放大和传播理论分析

无粒子数反转激光器基于原子状态的相干，因此，关于这类激光器运转特性，不能使用通常在激光物理学中使用的速率方程组。激光物理学中的速率方程组是讨论激光器工作过程中，原子的反转粒子数与其产生和吸收以及损耗的光子数随时间变化的速率方程，所以速率方程组能够较好地给出通常激光器的功率特性，但不能讨论与光的波动性有关的频率特性。

分析无粒子数反转光放大过程的理论，应该属于光与物质相互作用的半经典理论和全量子理论范畴。在这里，原子系统不再是二能级体系，而是三个或三个以上的能级体系，与之相互作用的电磁场可能是两种或两种以上。半经典理论中关于原子的运动使用密度矩阵方程，关于光的电磁场，可以使用缓变近似下的一阶波动方程；全量子理论中使用光子和电子的产生、湮没算符，并已建立起相应的福克-普朗克方程。

关于在原子状态相干介质中光场的传播问题，可在麦克士威-布洛赫方程范畴内讨论。由于在原子状态相干介质中，从增益最大的中心处到稍微偏离的频率处，能找到增益和吸收平衡，这是吸收为零的点。适当地调整高能级原子数，在零吸收点能使介质的折射率达到最大。当高能级不存在原子数时，零吸收出现在增益最大处。在增益最大点处光的吸收为零，介质的色散曲线在这点发生急剧变化，色散特性陡峭。所以此时的介质具有高折射率和陡峭色散的特点，这将影响在这种介质中传播的光的群速度和位相速度以及与之有关的现象。光在原子状态相干介质中的传播效应，将成为有趣的研究课题。

下面使用半经典理论，分析几种具体的无粒子数反转光放大系统的特性。

(1) 微波场作用下的具有两个相邻低能级的三能级原子系统无粒子数反转激光器

设三能级原子系统的基态由两个相邻的能级 2 和 1 构成，微波场 $\mathscr{E}_M$ 为

$$\mathscr{E}_M = E_M e^{-i[\omega_M t + \phi_M t]} \tag{8-6-1}$$

它同原子的能级 1 和 2 耦合，将原子泵浦到能级 2 的速率为 R_M，能级 2 的弛豫时间为 τ_M，从能级 1 和 2 向能级 3 的泵浦速率分别为 R_1 和 R_2，相应的能级 3 的弛豫时间分别为 τ_1 和 τ_2，被放大的光信号为

$$\mathscr{E}_a = E_a e^{-i[\omega_a t + \phi_a(t)]} \tag{8-6-2}$$

$$\mathscr{E}_b = E_b e^{-i[\omega_b t + \phi_b(t)]} \tag{8-6-3}$$

其中 $\mathscr{E}_a$ 对应能级 3 到能级 1 的受激跃迁，$\mathscr{E}_b$ 对应能级 3 到能级 2 的受激跃迁。整个布局如图 8-6-1(a)和图 8-6-1(b)所示。现在使用激光的半经典理论，讨论这类激光器的运转参数。

设工作物质置于光学谐振腔内，由激光物理学，激光器内的光场方程为[32]

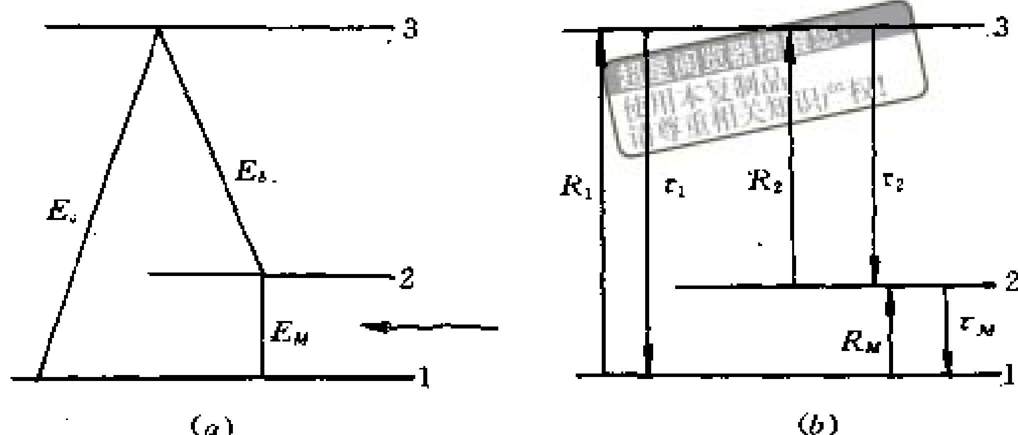


图 8-6-1

$$(\Omega - \omega + \dot{\phi})E = \mathrm{Re}(P) \tag{8-6-4}$$

$$\dot{E} + \frac{\gamma_C}{2}E = \mathrm{Im}(P) \tag{8-6-5}$$

式中 γ_C 是光的损耗速率，P 为工作物质的宏观电极化强度，Ω 为空腔的共振频率，ω 为激光频率，ϕ 为激光场的位相。工作物质原子的密度矩阵算符 ρ 服从方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}, \rho] + \Gamma\rho \tag{8-6-6}$$

式中 Γ 为能级上原子的弛豫速率，$\hat{H}$ 为系统的总哈密顿算

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

对于图 8-6-1 所示的三能级原子系统，哈密顿算符为

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_3|3\rangle\langle 3| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| \tag{8-6-7}$$

式中 $\hbar\omega_i$ 是受扰动的能级 i 的能量，$i=1,2,3$。该三能级原子系统与光场相互作用的哈密顿算符为

$$\begin{aligned}\hat{H}' = \hbar\{&\beta_a E_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_a t}|3\rangle\langle 1| + \beta_b E_b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_b t}|3\rangle\langle 2| \\ &+ \Omega_M \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_M t}|2\rangle\langle 1|\} + \mathrm{C.C}\end{aligned} \tag{8-6-8}$$

式中的 β_a 和 β_b 分别是激光场 $\mathscr{E}_a$ 和 $\mathscr{E}_b$ 与原子相应跃迁之间的耦合常数，Ω_M 是微波场的拉比频率。假设采用腔长为 L 的环形光学谐振腔，而且两个激光场与微波场之间满足相位匹配条件

$$(k_a - k_b - k_M)l \ll 1 \tag{8-6-9}$$

式中 k_a,k_b 和 k_M 分别是两个激光场和微波场的波数。

将(8-6-6)式的薛定谔表象中的算符变换为相互作用表象中算符,在相互作用表象中讨论密度矩阵算符方程。由(8-6-6)—(8-6-8)式,使用旋波近似,在相互作用表象,缓变的密度矩阵元素方程为

$$\dot{\rho}_{11} = -\Gamma_{11}\rho_{11} - \Gamma_{12}\rho_{22} + \frac{N}{\tau_1} + [-i\beta_a^* \mathscr{E}_a^* \rho_{13} - i\Omega_M^* \rho_{23} + \text{C.C}] \tag{8-6-10}$$

$$\dot{\rho}_{22} = -\Gamma_{22}\rho_{22} - \Gamma_{21}\rho_{11} + \frac{N}{\tau_2} + [-i\beta_b^* \mathscr{E}_b^* \rho_{32} - i\Omega_M \rho_{12} + \text{C.C}] \tag{8-6-11}$$

$$\rho_{33} + \rho_{22} + \rho_{11} = N \tag{8-6-12}$$

$$\dot{\rho}_{31} = -(\Gamma_1 + i\delta_1)\rho_{31} + i\beta_a \mathscr{E}_a(\rho_{33} - \rho_{22}) - i\beta_b \mathscr{E}_b \rho_{21} + i\Omega_M \rho_{32} \tag{8-6-13}$$

$$\dot{\rho}_{32} = -(\Gamma_2 + i\delta_2)\rho_{32} + i\beta_b \mathscr{E}_b(\rho_{33} - \rho_{22}) - i\beta_a \mathscr{E}_a \rho_{12} + i\Omega_M^* \rho_{32} \tag{8-6-14}$$

$$\dot{\rho}_{21} = -(\Gamma_M + i\delta_M)\rho_{21} + i\Omega_M(\rho_{22} - \rho_{11}) + i\beta_b^* \mathscr{E}_b^* \rho_{31} + i\beta_a \mathscr{E}_a \rho_{23} \tag{8-6-15}$$

式中

$$\Gamma_{11} = R_1 + R_M + \frac{1}{\tau_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_M}$$
$$\Gamma_{21} = \frac{1}{\tau_2} - R_M, \quad \Gamma_{22} = \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_M} + R_2 \tag{8-6-16}$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}\left(R_1 + R_M + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)$$
$$\Gamma_2 = \frac{1}{2}\left(R_2 + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_M}\right) \tag{8-6-17}$$
$$\Gamma_M = \frac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_M) + \frac{1}{\tau_M}$$

$$\delta_1 = \omega_{31} - \omega_a,\ \delta_2 = \omega_{32} - \omega_b,\ \delta_M = \omega_{21} - \omega_M \quad (8\text{-}6\text{-}18)$$

该环形腔激光器内的光场方程，由(8-6-4)和(8-6-5)式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_a + \frac{\nu_{ca}}{2}E_a = \mathrm{Im}(\beta_a^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_a}\rho_{31}) \quad (8\text{-}6\text{-}19)$$

$$(\Omega_a - \omega_a + \dot{\phi}_a)E_a = \mathrm{Re}(\beta_a^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_a}\rho_{31}) \quad (8\text{-}6\text{-}20)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_b + \frac{\nu_{cb}}{2}E_b = \mathrm{Im}(\beta_b^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_b}\rho_{32}) \quad (8\text{-}6\text{-}21)$$

$$(\Omega_b - \omega_b + \dot{\phi}_b)E_b = \mathrm{Re}(\beta_b^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_b}\rho_{32}) \quad (8\text{-}6\text{-}22)$$

式中 Ω_a 和 Ω_b 分别是对于光场 $\mathscr{E}_a$ 和 $\mathscr{E}_b$ 的空腔共振频率。

通过(8-6-19)和(8-6-21)式，可以研究激光器的增益。为此，要从(8-6-10)—(8-6-15)式解出 ρ_{31} 和 ρ_{32}。使用激光物理学中通常采用的逐级近似法求解，当 $\delta_a=\delta_b=\delta_M=0$ 时，其零级近似解为

$$\rho_{11}^{(0)} = \frac{N}{M}\left[\frac{R_2}{\tau_1} + \left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)\left(\frac{1}{\tau_M}+\frac{2|\Omega_M|^2}{\Gamma_M}\right)\right] \quad (8\text{-}6\text{-}23)$$

$$\rho_{22}^{(0)} = \frac{N}{M}\left[\frac{R_1}{\tau_2} + \left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)\left(R_M+\frac{2|\Omega_M|^2}{\Gamma_M}\right)\right] \quad (8\text{-}6\text{-}24)$$

$$\rho_{33}^{(0)} = \frac{N}{M}\left[R_2R_M + (R_1+R_2)\frac{2|\Omega_M|^2}{\Gamma_M} + R_1(R_2+\frac{1}{\Gamma_M})\right]$$

$$(8\text{-}6\text{-}25)$$

式中

$$M = \left(\Gamma_{11}+\frac{2|\Omega_M|^2}{\Gamma_M}\right)\left(\Gamma_{22}+\frac{2|\Omega_M|^2}{\Gamma_M}\right) - \left(\Gamma_{12}-\frac{2|\Omega_M|^2}{\Gamma_M}\right)\left(\Gamma_{21}-\frac{2|\Omega_M|^2}{\Gamma_M}\right) \quad (8\text{-}6\text{-}26)$$

$$\rho_{21}^{(0)} = \frac{\mathrm{i}\Omega_M(\rho_{22}^{(0)}-\rho_{11}^{(0)})}{\Gamma_M} \quad (8\text{-}6\text{-}27)$$

$$\rho_{32}^{(0)} = 0,\qquad \rho_{31}^{(0)} = 0 \quad (8\text{-}6\text{-}28)$$

密度矩阵元素的一级近似表示式为

$$\rho_{31}^{(1)} = \frac{\mathrm{i}}{\Gamma_1\Gamma_2+|\Omega_M|^2}\{\beta_a\mathscr{E}_a\Gamma_2[(\rho_{33}^{(0)}-\rho_{11}^{(0)})-\mathrm{i}\Omega_M\rho_{12}^{(0)}]$$

$$-\beta_b\mathscr{E}_b[\Gamma_2\rho_{21}^{(0)} - \mathrm{i}\Omega_M(\rho_{33}^{(0)} - \rho_{22}^{(0)})]\} \tag{8-6-29}$$

$$\rho_{32}^{(1)} = \frac{\mathrm{i}}{\Gamma_1\Gamma_2 + |\Omega_M|^2}\{\beta_b\mathscr{E}_b[\Gamma_1(\rho_{33}^{(0)} - \rho_{22}^{(0)}) - \mathrm{i}\Omega_M^*\rho_{21}^{(0)}] - \beta_a\mathscr{E}_a[\Gamma_1\rho_{12}^{(0)} - \mathrm{i}\Omega_M^*(\rho_{33}^{(0)} - \rho_{11}^{(0)})]\} \tag{8-6-30}$$

依此，还可以求出高级近似表示式。

将(8-6-29)和(8-6-30)式代入(8-6-19)和(8-6-21)式，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_a = -\frac{\nu_{ca}}{2}E_a + g_aE_a + f_aE_b \tag{8-6-31}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_b = -\frac{\nu_{cb}}{2}E_b + g_bE_b + f_bE_a \tag{8-6-32}$$

上式中线性增益系数表示式为

$$g_a = \frac{1}{\Gamma_1\Gamma_2 + |\Omega_M|^2}\{|\beta_a|^2[\Gamma_2(\rho_{33}^{(0)} - \rho_{11}^{(0)}) + |\Omega_M||\rho_{21}^{(0)}|]\} \tag{8-6-33}$$

$$g_b = \frac{1}{\Gamma_1\Gamma_2 + |\Omega_M|^2}\{|\beta_b|^2[\Gamma_1(\rho_{33}^{(0)} - \rho_{22}^{(0)})\,|\Omega_M||\rho_{21}^{(0)}|]\} \tag{8-6-34}$$

$$f_a = \frac{1}{\Gamma_1\Gamma_2 + |\Omega_M|^2}\{|\beta_a||\beta_b|[\Gamma_2|\rho_{21}^{(0)}| + |\Omega_M|(\rho_{33}^{(0)} - \rho_{22}^{(0)}|)]\}\cos\phi(t) \tag{8-6-35}$$

$$f_b = \frac{1}{\Gamma_1\Gamma_2 + |\Omega_M|^2}\{|\beta_a||\beta_b|[\Gamma_1|\rho_{21}^{(0)}| - |\Omega_M|\rho_{33}^{(0)} - \rho_{11}^{(0)}|)]\}\cos\phi(t) \tag{8-6-36}$$

式中

$$\rho_{21}^{(0)} = -|\rho_{21}^{(0)}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{21}} \tag{8-6-37}$$

$$\phi(t) = \phi_a(t) - \phi_b(t) + \theta_{oa} - \theta_{ob} - \theta_{21} \tag{8-6-38}$$

使用(8-6-38)式和(8-6-20)、(8-6-22)式还可以讨论频率锁定等激光器的频率特性[33]。

从以上讨论可以看出，关于利用原子状态相干的无粒子数反

转激光器运转特性的理论分析方法，与人们以往所熟悉的激光物理学中的半经典理论方法是相似的。

（2）现在使用半经典理论分析具有两个相邻高能级的三能级原子系统。假设原子的三个断续能级结构如图 8-6-2 所示。能级 a 和 b 上的粒子通过自发衰减到基态 c，两个相邻的高能级 a 和 b 通过频率为 ω_s 的强光场 E_s 将它们耦合起来，造成状态相干。设非相干泵浦速率为 R，讨论相应于能级 a 与 c 之间跃迁的频率为 ω_r 的弱探测光场 E_r 的放大问题。

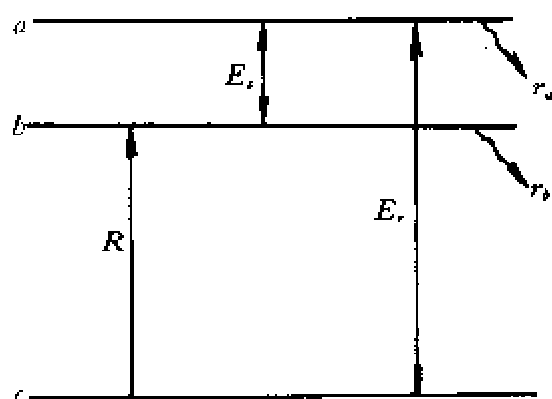


图 8-6-2

使用探测光模式的光子数目 n_r 表示光场，如忽略光子传播损耗，则由（8-6-5）式得到光子数 n_r 的方程为

$$\frac{\mathrm{d}n_r}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{Im}(\Omega_r\rho_{ac}) \tag{8-6-39}$$

式中 n_r 与被放大的探测光的光强 I_r 关系为

$$I_r=\frac{n_r c\hbar\omega}{V} \tag{8-6-40}$$

Ω_r 表示探测光的拉比频率

$$\Omega_r=\frac{\mu_{ac}E_{or}}{2\hbar} \tag{8-6-41}$$

光场与原子系统相互作用，原子系统的密度矩阵元素方程为

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{aa}}{\mathrm{d}t}=-2\mathrm{Im}(\Omega_r\rho_{ac}+\Omega_s\rho_{ab})-\gamma_a\rho_{aa} \tag{8-6-42}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{bb}}{\mathrm{d}t} = 2\mathrm{Im}(\Omega_s \rho_{ab}) - \gamma_b \rho_{bb} + R\rho_{cc} \tag{8-6-43}$$

$$\rho_{cc} + \rho_{bb} + \rho_{aa} = 1 \tag{8-6-44}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{ac}}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{\gamma_a}{2} + \mathrm{i}\delta_r\right)\rho_{ac} - \mathrm{i}\Omega_r^*(\rho_{cc} - \rho_{aa}) - \mathrm{i}\Omega_s^* \rho_{bc} \tag{8-6-45}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{ab}}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{\gamma_a + \gamma_b}{2} + \mathrm{i}\delta_s\right)\rho_{ab} - \mathrm{i}\Omega_r^*(\rho_{bb} - \rho_{cc}) - \mathrm{i}\Omega_r^* \rho_{bc}^* \tag{8-6-46}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{bc}}{\mathrm{d}t} = \left[-\frac{\gamma_b}{2} + \mathrm{i}(\delta_r - \delta_s)\right]\rho_{bc} - \mathrm{i}\Omega_s \rho_{ac} + \mathrm{i}\Omega_r^* \rho_{ab}^* \tag{8-6-47}$$

式中强光场的拉比频率 Ω_s 为

$$\Omega_s = \frac{\mu_{ab} E_{os}}{2\hbar} \tag{8-6-48}$$

E_{os}为强光场的振幅；δ_r 和 δ_s 分别为

$$\delta_r = \omega_r - \omega_{ac} \qquad \delta_s = \omega_s - \omega_{ab} \tag{8-6-49}$$

ω_{ac}和 ω_{ab}分别是原子从能级 a 向能级 c 和 b 跃迁时相应的频率。

若能级 b 为亚稳态，则 $\gamma_b \approx 0$，设 $\delta_s = \delta_r = 0$，并且不考虑拉比频率的时间变化关系，求出方程(8-6-42)—(8-6-47)的稳态解 ρ_{ac}，代入(8-6-39)式得到

$$\frac{\mathrm{d}n_r}{\mathrm{d}t} = \frac{R\left(\dfrac{\mu_{ac}E_{or}}{\mu_{ab}E_{os}}\right)^2}{1 + \dfrac{R}{\gamma_a}\left\{\left(\dfrac{\gamma_a \hbar}{\mu_{ab}E_{os}}\right)^2\left[1 + \left(\dfrac{\mu_{ac}E_{or}}{\mu_{ab}E_{os}}\right)^2\right] - \left[1 - \left(\dfrac{\mu_{ac}E_{or}}{\mu_{ab}E_{os}}\right)^2\right]\left[2 - \left(\dfrac{\mu_{ac}E_{or}}{\mu_{ab}E_{os}}\right)^2\right]\right\}} \tag{8-6-50}$$

当 $E_{os} \gg E_{or}$时，上式近似为

$$\frac{\mathrm{d}n_r}{\mathrm{d}t} = \frac{R\left(\dfrac{\mu_{ac}}{\mu_{ab}}\right)^2\left(\dfrac{E_{or}}{E_{os}}\right)^2}{1 + 2\dfrac{R}{\gamma_a}} = \frac{1}{2}(1 - \rho_{cc}^{(0)})\gamma_a\left(\frac{\mu_{ac}E_{or}}{\mu_{ab}E_{os}}\right)^2 \tag{8-6-51}$$

式中 $\rho_{cc}^{(0)}$是稳定状态时基态的粒子数。上式表明，即使在基态有50%以上的粒子数时，光放大是可能的。

可以求出这类无粒子数反转系统的增益系数 G。设被放大的光场沿 x 轴传播，则有

$$I_r = I_{or}e^{Gx} \tag{8-6-52}$$

增益系数 G 为

$$G = \frac{N\hbar\omega}{V}\frac{1}{I_{or}}\frac{dn_r}{dt} \tag{8-6-53}$$

式中 N 为工作物质体积 V 内的总粒子数。当考虑到拉比频率与时间关系时，增益系数 G 可表示为

$$G = \frac{N\hbar\omega}{V}\frac{1}{I_{or}}\Delta t\int_{\Delta t}\left(\frac{dn_r}{dt}\right)dt \tag{8-6-54}$$

式中 I_{or}是光脉冲的峰值强度，Δt 是 dn_r/dt 对积分有贡献的时间间隔。

对于具体的原子系数，可以使用(8-6-51)和(8-6-53)式，讨论产生无粒子数反转光放大的阈值和增益情况[13]。

(3) 现在分析在简单的三能级原子系统中，光场的传播和放大问题。

假设光场 E_α与原子的能级 a 和 c 跃迁相对应，E_β 与原子的 a 和 b 能级跃迁相对应，如图 8-6-3 所示。采用半经典理论，研究在这样的简单情形，E_α 和 E_β 的传播和放大条件。

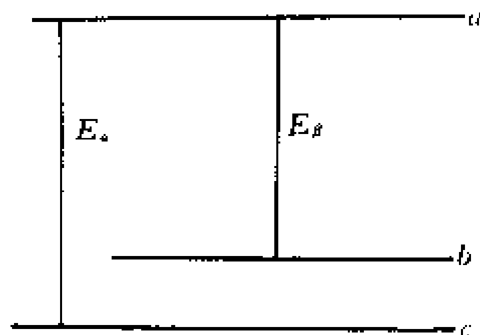


图 8-6-3

首先建立光场 E_α 和 E_β 的传播方程。设光场沿 z 轴传播，介质的导电率为 σ，宏观电极化强度为 P，则由麦克士威方程组直接得到光的电场 E 的波动方程

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \qquad (8\text{-}6\text{-}55)$$

式中 ε_0 和 μ_0 分别为真空中的介电系数和导磁率。现在在介质中的光场为

$$E = \frac{1}{2}\left[\mathscr{E}_\alpha e^{i(k_\alpha z-\omega_\alpha t)} + \mathscr{E}_\beta e^{i(k_\beta z-\omega_\beta t)}\right] \qquad (8\text{-}6\text{-}56)$$

将(8-6-56)式代入(8-6-55)式，取缓变近似，则得到关于光场 E_α 的方程为

$$-i\omega_\alpha\frac{\partial\mathscr{E}_\alpha}{\partial z} - i\frac{\omega_\alpha}{\varepsilon_\alpha c_\alpha}\frac{\partial\mathscr{E}_\alpha}{\partial t} - i\frac{\omega_\alpha\sigma_\alpha}{\varepsilon_\alpha c_\alpha}\mathscr{E}_\alpha = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_\alpha c_\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(N\mu_{ac}\rho_{ac})$$

$$(8\text{-}6\text{-}57)$$

式中

$$c_\alpha = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\alpha}}, \qquad k_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{c_\alpha}$$

c 为真空中光速，ε_α 为介质的介电系数。宏观电级化强度 P 为

$$P_\alpha = N\mu_{ac}\rho_{ac} \qquad (8\text{-}6\text{-}58)$$

若设

$$\rho_{ac} = \sigma_{ac}e^{-i\omega_\alpha t} \qquad (8\text{-}6\text{-}59)$$

式中 σ_{ac} 是密度矩阵元素 ρ_{ac} 的缓变振幅，将(8-6-59)式代入(8-6-57)式右端后，得到

$$\frac{\partial\mathscr{E}_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{c_\alpha\varepsilon_\alpha}\frac{\partial\mathscr{E}_\alpha}{\partial t} + \gamma_{c\alpha}\mathscr{E}_\alpha = \frac{i\omega_\alpha N\mu_{ac}\sigma_{ac}}{\varepsilon_0\varepsilon_\alpha c_\alpha} \qquad (8\text{-}6\text{-}60)$$

式中

$$\gamma_{c\alpha} = \frac{\sigma_\alpha}{\varepsilon_0\varepsilon_\alpha c_\alpha} \qquad (8\text{-}6\text{-}61)$$

同理得到

$$\frac{\partial\mathscr{E}_\beta}{\partial z} + \frac{1}{c_\beta\varepsilon_\beta} + \frac{\partial\mathscr{E}_\beta}{\partial t} + \gamma_{c\beta}\mathscr{E}_\beta = \frac{i\omega_\beta N\mu_{ab}\sigma_{ab}}{\varepsilon_0\varepsilon_\beta c_\beta} \qquad (8\text{-}6\text{-}62)$$

式中 σ_{ab} 表示密度矩阵元素 ρ_{ab} 的缓变振幅

$$\rho_{ab} = \sigma_{ab}e^{-i\omega_\beta t} \qquad (8\text{-}6\text{-}63)$$

$\gamma_{c\beta}$为

$$\gamma_{c\beta} = \frac{\sigma_\beta}{\varepsilon_0 \varepsilon_\beta c_\beta} \tag{8-6-64}$$

三能级原子系统在光场 E_α 和 E_β 作用下的密度矩阵元素 ρ_{ac} 和 ρ_{ab}的方程为

$$\dot{\rho}_{ac} = -(\gamma_{ac} + \mathrm{i}\omega_{ac})\rho_{ac} + \mathrm{i}\frac{\mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha}{2\hbar}(\rho_{cc} - \rho_{aa}) + \frac{\mathrm{i}\mu_{ab}\mathscr{E}_\beta}{2\hbar}\rho_{bc} \tag{8-6-65}$$

$$\dot{\rho}_{ab} = -(\gamma_{ab} - \mathrm{i}\omega_{ab})\rho_{ab} + \mathrm{i}\frac{\mu_{ab}\mathscr{E}_\beta}{2\hbar}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) + \frac{\mathrm{i}\mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha}{2\hbar}\rho_{bc}^* \tag{8-6-66}$$

式中 $\omega_{ac}=(E_a-E_c)/\hbar$，$\omega_a=(E_a-E_b)/\hbar$，$E_a$、$E_b$ 和 E_c 分别是能级 a、b 和 c 的能量。设

$$\rho_{bc} = \sigma_{bc}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_\alpha - \omega_\beta)t} \tag{8-6-67}$$

它显然表示原子状态 b 和 c 的相干性。将(8-6-59)(8-6-63)和(8-6-67)代入(8-6-65)和(8-6-66)式，得到

$$\dot{\sigma}_{ac} = -(\gamma_{ac} + \mathrm{i}\delta_1)\sigma_{ac} + \mathrm{i}\frac{\mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha}{2\hbar}(\rho_{cc} - \rho_{aa}) + \frac{\mathrm{i}\mu_{ab}\mathscr{E}_\beta}{2\hbar}\sigma_{bc} \tag{8-6-68}$$

$$\dot{\sigma}_{ab} = -(\gamma_{ab} + \mathrm{i}\delta_2)\sigma_{ab} + \mathrm{i}\frac{\mu_{ab}\mathscr{E}_\beta}{2\hbar}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) + \frac{\mathrm{i}\mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha}{2\hbar}\sigma_{bc}^* \tag{8-6-69}$$

式中

$$\delta_1 = \omega_{ac} - \omega_\alpha \tag{8-6-70}$$

$$\delta_2 = \omega_{ab} - \omega_\beta \tag{8-6-71}$$

γ_{ac}和 γ_{ab}分别表示能级 a 到能级 c 和 b 的辐射弛豫速率。

下面在线性范围内讨论这样简单的三能级原子系统出现不稳定性的条件。为此可假设在上述方程中的粒子数差 $\rho_{cc}-\rho_{aa}$、$\rho_{bb}-\rho_{aa}$ 以及 ρ_{bc} 为常数，并设(8-6-60)、(8-6-62)以及(8-6-68)、(8-6-69)式有平面波形式的解，即

$$\mathscr{E}_\alpha、\mathscr{E}_\beta、\sigma_{ac}、\sigma_{ab} \sim e^{-i(\omega t - kz)} \tag{8-6-72}$$

将它们代入(8-6-68)和(8-6-69)式，得到

$$\sigma_{ac} = \frac{i[\mu_{ab}\mathscr{E}_\beta\sigma_{bc} + \mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha(\rho_{cc} - \rho_{aa})]}{2\hbar[\gamma_{ac} + i(\delta_1 - \omega)]} \tag{8-6-73}$$

$$\sigma_{ab} = \frac{i[\mu_{cc}\mathscr{E}_\alpha\sigma_{bc}^* + \mu_{ab}\mathscr{E}_\beta(\rho_{bb} - \rho_{cc})]}{2\hbar[\gamma_{ab} + i(\delta_2 - \omega)]} \tag{8-6-74}$$

将(8-6-72)—(8-6-74)式代入(8-6-60)和(8-6-62)式，得到

$$\frac{\mu_{ac}}{2\hbar}\left[i\left(k - \frac{\omega}{c_\alpha}\right) + \gamma_{c\alpha} + A(\rho_{cc} - \rho_{aa})\right]\mathscr{E}_\alpha + \frac{\mu_{ab}}{2\hbar}A\sigma_{bc}\mathscr{E}_\beta = 0 \tag{8-6-75}$$

$$i\frac{\mu_{ab}}{2\hbar}\left[i\left(k - \frac{\omega}{c_\beta}\right) + \gamma_{c\beta} + B(\rho_{bb} - \rho_{aa})\right]\mathscr{E}_\beta + \frac{\mu_{ac}}{2\hbar}B\sigma_{bc}^*\mathscr{E}_\alpha = 0 \tag{8-6-76}$$

式中

$$A = \frac{\omega_\alpha N\mu_{ac}\sigma_{ac}}{\varepsilon_0\varepsilon_\alpha c_\alpha[\gamma_{ac} + i(\delta_1 - \omega)]} \tag{8-6-77}$$

$$B = \frac{\omega_\beta N\mu_{ab}\sigma_{ab}}{\varepsilon_0\varepsilon_\beta c_\beta[\gamma_{ab} + i(\delta_2 - \omega)]} \tag{8-6-78}$$

为了简单，设损耗 $\gamma_{c\alpha} = \gamma_{c\beta} = 0$，由(8-6-75)和(8-6-76)式得到关于波数 k 的方程为

$$\begin{aligned}&\left(k - \frac{\omega}{c_\alpha}\right)\left(k - \frac{\omega}{c_\beta}\right) - i\left(k - \frac{\omega}{c_\alpha}\right)(\rho_{bb} - \rho_{aa})B \\ &- i\left(k - \frac{\omega}{c_\beta}\right)(\rho_{cc} - \rho_{aa})A + D = 0\end{aligned} \tag{8-6-79}$$

式中

$$D = AB[|\sigma_{bc}|^2 - (\rho_{cc} - \rho_{aa})(\rho_{bb} - \rho_{aa})] \tag{8-6-80}$$

欲使在这样简单的三能级原子系统在两个光场 E_α 和 E_β 作用下，产生光的放大，应要求

$$\mathrm{Im}(k) < 0 \tag{8-6-81}$$

这相当于要求(8-6-79)式中的

$$D > 0 \tag{8-6-82}$$

由(8-6-80)式，即相当要求

$$|\sigma_{bc}|^2 > (\rho_{cc} - \rho_{aa})(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \tag{8-6-83}$$

就是说在原子状态 b 和 c 发生相干的情况下，才可能有光的放大产生，又由(8-6-83)式看出，此时原子的高能级不可能是空的，即不可能是无粒子数居集。倘若 $\rho_{aa}=0$，则导致

$$|\rho_{bc}|^2 > \rho_{cc}\rho_{bb} \tag{8-6-84}$$

这与密度矩阵元素的正定条件相违背。

总结以上的讨论结果可以看出，简单的 Λ 型系统必须具有相应于能态 b 和 c 的低频相干性和高能态部分地居集粒子数，才有可能实现无粒子数反转情形下的光放大[23]。

(4) 现在从理论上分析双 Λ 型系统。设原子是具有两个相邻的低能级的四能级系统，光场 E_m 和 E_n 是使两个低能态产生状态相干的泵浦光场，讨论弱探测光场 E_α 和 E_β 的传播和放大问题。这可能有两种配置，如图 8-6-4(a)和 8-6-4(b)所示。光场 E_α、E_β、E_m 和 E_n 的方程，可由类似于(8-6-60)和(8-6-62)式的建立过程得到，它们是

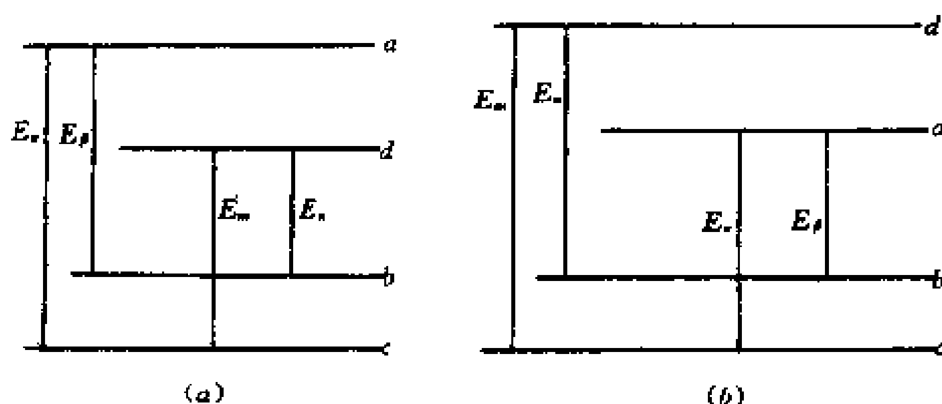


图 8-6-4

$$\frac{\partial \mathscr{E}_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{c_\alpha \varepsilon_\alpha} \frac{\partial \mathscr{E}_\alpha}{\partial t} + \gamma_{c\alpha} \mathscr{E}_\alpha = \mathrm{i} \frac{\omega_\alpha N \mu_{ac} \sigma_{ac}}{\varepsilon_0 \varepsilon_\alpha c_\alpha} \tag{8-6-85}$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}_\beta}{\partial t} + \frac{1}{c_\beta \varepsilon_\beta} \frac{\partial \mathscr{E}_\beta}{\partial t} + \gamma_{c\beta} \mathscr{E}_\beta = \mathrm{i} \frac{\omega_\beta N \mu_{ab} \sigma_{ab}}{\varepsilon_0 \varepsilon_\beta c_\beta} \tag{8-6-86}$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}_m}{\partial z} + \frac{1}{c_m \varepsilon_m} \frac{\partial \mathscr{E}_m}{\partial t} + \gamma_{cm} \mathscr{E}_m = \frac{\mathrm{i}\omega_m N \mu_{dc} \sigma_{dc}}{\varepsilon_0 \varepsilon_m c_m} \tag{8-6-87}$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}_n}{\partial z} + \frac{1}{c_n \varepsilon_n} \frac{\partial \mathscr{E}_n}{\partial t} + \gamma_{cn} \mathscr{E}_n = \frac{\mathrm{i}\omega_n N \mu_{db} \sigma_{db}}{\varepsilon_0 \varepsilon_n c_n} \tag{8-6-88}$$

在上述光场作用下，四能级原子系统的密度矩阵元素方程为

$$\dot{\rho}_{aa} = \Gamma_a + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{ac} E_\alpha \rho_{ca} + \mu_{ab} E_\beta \rho_{ba} - \mathrm{C.C}] \tag{8-6-89}$$

$$\dot{\rho}_{bb} = \Gamma_b + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{ab} E_\beta^* \rho_{ab} + \mu_{db} E_n^* \rho_{db} - \mathrm{C.C}] \tag{8-6-90}$$

$$\dot{\rho}_{cc} = \Gamma_c + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{ac} E_\alpha^* \rho_{ac} + \mu_{dc} E_m^* \rho_{dc} - \mathrm{C.C}] \tag{8-6-91}$$

$$\rho_{dd} + \rho_{cc} + \rho_{bb} + \rho_{aa} = 1 \tag{8-6-92}$$

$$\dot{\rho}_{dc} = -(\gamma_{dc} + \mathrm{i}\omega_{dc})\rho_{dc} + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{dc} E_m (\rho_{cc} - \rho_{dd}) + \mu_{db} E_n \rho_{bc} - \mu_{ac} E_\alpha \rho_{ad}^*] \tag{8-6-93}$$

$$\dot{\rho}_{db} = -(\gamma_{db} + \mathrm{i}\omega_{db})\rho_{db} + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{ab} E_n (\rho_{bb} - \rho_{dd}) + \mu_{dc} E_m \rho_{bc}^* - \mu_{ab} E_\beta \rho_{ad}^*] \tag{8-6-94}$$

$$\dot{\rho}_{ac} = -(\gamma_{ac} + \mathrm{i}\omega_{ac})\rho_{ac} + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{ac} E_\alpha (\rho_{cc} - \rho_{aa}) + \mu_{ab} E_\beta \rho_{bc} - \mu_{dc} E_m \rho_{ad}] \tag{8-6-95}$$

$$\dot{\rho}_{ab} = -(\gamma_{ab} + \mathrm{i}\omega_{ab})\rho_{ab} + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{ab} E_\beta (\rho_{bb} - \rho_{aa}) + \mu_{ac} E_\alpha \rho_{bc}^* - \mu_{db} E_n \rho_{ad}] \tag{8-6-96}$$

$$\dot{\rho}_{ad} = -[(\gamma_{ad} + \mathrm{i}(\omega_{dc} - \omega_{db})]\rho_{ad} + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{ac} E_\alpha \rho_{dc}^* + \mu_{ab} E_\beta \rho_{db}^* - \mu_{dc} E_m^* \rho_{ac} - \mu_{db} E_n^* \rho_{ab}] \tag{8-6-97}$$

$$\dot{\rho}_{bc} = -[\gamma_{bc} + i(\omega_{ac} - \omega_{ab})]\rho_{bc} + \frac{i}{2\hbar}[\mu_{db}E_n^*\rho_{ac} - \mu_{ac}E_a\rho_{ab}^*$$

$$+ \mu_{db}E_n^*\rho_{dc} - \mu_{dc}E_m\rho_{db}^*] \tag{8-6-98}$$

式中 Γ_a、Γ_b 和 Γ_c 分别表示其它各能级向 $j(j=a,b,c)$能级和 j 能级向其它能级的粒子数总弛豫过程。

若设

$$\rho_{dc} = \sigma_{dc}e^{-i\omega_m t} \tag{8-6-99}$$

$$\rho_{db} = \sigma_{db}e^{-i\omega_n t} \tag{8-6-100}$$

$$\rho_{ac} = \sigma_{ac}e^{-i\omega_\alpha t} \tag{8-6-101}$$

$$\rho_{ab} = \sigma_{ab}e^{-i\omega_\beta t} \tag{8-6-102}$$

$$\rho_{ad} = \sigma_{ad}e^{-i(\omega_m - \omega_\alpha)t} \tag{8-6-103}$$

$$\rho_{bc} = \sigma_{bc}e^{-i(\omega_n - \omega_\beta)t} \tag{8-6-104}$$

将它们代入(8-6-93)—(8-6-98)式，得到

$$\dot{\sigma}_{dc} = -(\gamma_{dc} + i\delta_3)\sigma_{dc} + \frac{i}{2\hbar}[\mu_{dc}\mathscr{E}_m(\rho_{cc} - \rho_{dd})$$

$$+ \mu_{db}\mathscr{E}_n\sigma_{bc} - \mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha\sigma_{ad}^*] \tag{8-6-105}$$

$$\dot{\sigma}_{db} = -(\gamma_{db} + i\delta_4)\sigma_{db} + \frac{i}{2\hbar}[\mu_{db}\mathscr{E}_n(\rho_{bb} - \rho_{dd})$$

$$+ \mu_{dc}\mathscr{E}_m\sigma_{bc}^* - \mu_{ab}\mathscr{E}_\beta\sigma_{ad}^*] \tag{8-6-106}$$

$$\dot{\sigma}_{ac} = -(\gamma_{ac} + i\delta_1)\sigma_{ac} + \frac{i}{2\hbar}[\mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha(\rho_{cc} - \rho_{aa})$$

$$+ \mu_{ab}\mathscr{E}_\beta\sigma_{bc} - \mu_{dc}\mathscr{E}_m\sigma_{ad}] \tag{8-6-107}$$

$$\dot{\sigma}_{ab} = -(\gamma_{ab} + i\delta_2)\sigma_{ab} + \frac{i}{2\hbar}[\mu_{ab}\mathscr{E}_\beta(\rho_{bb} - \rho_{aa})$$

$$+ \mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha\sigma_{bc}^* - \mu_{db}\mathscr{E}_n\sigma_{ad}] \tag{8-6-108}$$

$$\dot{\sigma}_{ad} = -[(\gamma_{ad} + i(\delta_3 - \delta_4)]\sigma_{ad} + \frac{i}{2\hbar}[\mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha\sigma_{dc}^* + \mu_{ab}\mathscr{E}_\beta\sigma_{db}^*$$

$$- \mu_{dc}\mathscr{E}_m\sigma_{ac} - \mu_{db}\mathscr{E}_n^*\sigma_{ab}] \tag{8-6-109}$$

$$\dot{\sigma}_{bc} = -[\gamma_{bc} + i(\delta_1 - \delta_2)]\sigma_{bc} + \frac{i}{2\hbar}[\mu_{db}\mathscr{E}_\beta^*\sigma_{ac} - \mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha\sigma_{ab}^*$$

$$+ \mu_{db}\mathscr{E}_n^* \sigma_{dc} - \mu_{dc}\mathscr{E}_m \sigma_{db}^*] \tag{8-6-110}$$

式中

$$\delta_3 = \omega_{dc} - \omega_m, \quad \delta_4 = \omega_{db} - \omega_n \tag{8-6-111}$$

在线性范围内，可认为 $E_\alpha \simeq E_\beta \simeq 0$，于是由上面的方程得到

$$\dot{\sigma}_{dc} = -(\gamma_{dc} + \mathrm{i}\delta_3)\sigma_{dc} + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{dc}\mathscr{E}_m(\rho_{cc} - \rho_{dd}) + \mu_{db}\mathscr{E}_n\sigma_{bc}] \tag{8-6-112}$$

$$\dot{\sigma}_{db} = -(\gamma_{db} + \mathrm{i}\delta_4)\sigma_{db} + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{db}\mathscr{E}_n(\rho_{bb} - \rho_{dd}) + \mu_{dc}\mathscr{E}_m\sigma_{bc}^*] \tag{8-6-113}$$

$$\dot{\sigma}_{bc} = -[\gamma_{bc} + \mathrm{i}(\delta_1 - \delta_2)]\sigma_{bc} + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[\mu_{db}\mathscr{E}_n^*\sigma_{dc} - \mu_{dc}\mathscr{E}_m\sigma_{db}^*] \tag{8-6-114}$$

设 $\delta_3 = \delta_4 = 0$，且两个泵浦光相等 $|\mathscr{E}_m| = |\mathscr{E}_n|$，为了简单，设 $\rho_{cc}^{(0)} = \rho_{bb}^{(0)}$，$\gamma_{dc} = \gamma_{db} = \gamma_d$，从(8-6-112)和(8-6-113)式绝热消除原子极化，得到

$$\sigma_{dc} = \frac{\mathrm{i}[\mu_{dc}\mathscr{E}_m(\rho_{cc} - \rho_{dd}) + \mu_{db}\mathscr{E}_n\sigma_{bc}]}{2\hbar\gamma_d} \tag{8-6-115}$$

$$\sigma_{db} = \frac{\mathrm{i}[\mu_{db}\mathscr{E}_n(\rho_{bb} - \rho_{dd}) + \mu_{dc}\mathscr{E}_m\sigma_{bc}^*]}{2\hbar\gamma_d} \tag{8-6-116}$$

将以上二式代入(8-6-114)式得到

$$\dot{\sigma}_{bc} = -\left(\gamma_{bc} + \frac{\mu_{dc}^2\varepsilon_m^2}{2\hbar^2\gamma_d}\right)\sigma_{bc} - \frac{\mu_{dc}^2\mathscr{E}_m^2}{2\hbar^2\gamma_d}N_d \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_m - \theta_n)} \tag{8-6-117}$$

式中

$$N_d = \rho_{cc} - \rho_{dd} = \rho_{bb} - \rho_{dd} \tag{8-6-118}$$

θ_m 和 θ_n 是泵浦光场 E_m 和 E_n 的位相角。将(8-6-73)和(8-6-74)式分别代入 (8-6-85)和(8-6-86)式，得到

$$\frac{\partial\mathscr{E}_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon_\alpha c_\alpha}\frac{\partial\mathscr{E}_\alpha}{\partial t} + \gamma_{c\alpha}\mathscr{E}_\alpha = -M_\alpha(\mu_{\alpha c}\mathscr{E}_\alpha N_\alpha + \mu_{ab}\mathscr{E}_\beta\sigma_{bc}) \tag{8-6-119}$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}_\beta}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon_\beta c_\beta}\frac{\partial \mathscr{E}_\beta}{\partial t} + \gamma_{c\beta}\mathscr{E}_\beta = -M_\beta(\mu_{ab}\mathscr{E}_\beta N_\alpha + \mu_{ac}\mathscr{E}_\alpha \sigma_{bc}^*) \tag{8-6-120}$$

式中

$$M_\alpha = \frac{\omega_\alpha N \mu_{ac}}{2\hbar \varepsilon_0 \varepsilon_\alpha c_\alpha \gamma_{ac}} \tag{8-6-121}$$

$$M_\beta = \frac{\omega_\beta N \mu_{ab}}{2\hbar \varepsilon_0 \varepsilon_\beta c_\beta \gamma_{ab}} \tag{8-6-122}$$

$$N_\alpha = \rho_{cc} - \rho_{aa} = \rho_{bb} - \rho_{aa} \tag{8-6-123}$$

将(8-6-115)和(8-6-116)式分别代入(8-6-87)(8-6-88)式，得到

$$\frac{\partial \mathscr{E}_m}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon_m c_m}\frac{\partial \mathscr{E}_m}{\partial t} + \gamma_{cm}\mathscr{E}_m = -M_m(\mu_{dc}\mathscr{E}_m N_d + \mu_{db}\mathscr{E}_n \sigma_{bc}) \tag{8-6-124}$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}_n}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon_n c_n}\frac{\partial \mathscr{E}_n}{\partial t} + \gamma_{cn}\mathscr{E}_n = -M_n(\mu_{db}\mathscr{E}_n N_d + \mu_{dc}\mathscr{E}_m \sigma_{bc}^*) \tag{8-6-125}$$

式中

$$M_m = \frac{\omega_m N \mu_{dc}}{2\hbar \varepsilon_0 \varepsilon_m c_m \gamma_d} \tag{8-6-126}$$

$$M_n = \frac{\omega_n N \mu_{db}}{2\hbar \varepsilon_0 \varepsilon_n c_n \gamma_d} \tag{8-6-127}$$

若设

$$\gamma_{cm} = \gamma_{cn} = \gamma_{c\alpha} = \gamma_{c\beta} = 0, \quad |\mathscr{E}_m| = |\mathscr{E}_n|, \quad |\mathscr{E}_\alpha| = |\mathscr{E}_\beta| \tag{8-6-128}$$

$$c_m = c_n = c_p, c_\alpha = c_\beta = c, M_\alpha = M_\beta = M_1, M_m = M_n = M_p$$

由(8-6-119)(8-6-120)和(8-6-124)(8-6-125)表示的被放大的光场强度 I 和泵浦光场的强度 I_P 传播方程为

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} - 2MI(N_\alpha - \sigma) \tag{8-6-129}$$

$$\frac{\partial I_P}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial I_P}{\partial t} - 2M_P I_P(N_d - \sigma) \tag{8-6-130}$$

式中 σ 为 σ_{bc}的幅度

$$\sigma_{bc} = \sigma e^{i\theta} \tag{8-6-131}$$

在稳态情形，(8-6-129)和(8-6-130)式将给出类似于通常激光器饱和增益表示式，在此基础上可进一步讨论激光器的运转特性[23]。

通过对以上四个具体例子的分析，可以了解到采用光与原子相互作用的半经典理论，研究以原子状态相干为依据的无粒子数反转激光器和在原子状态相干介质中光的传播方面的问题的方法，以此作为基础，可进一步深入研究。同样，可以采用全量子理论讨论这些问题。

§8-7 无粒子数反转光放大实验

已经有一些关于无粒子数反转光放大方面的实验报导，对有些实验存在若干争议，下面简单介绍几种。

在强相干光场驱动下，发现锶原子束蒸汽对光的透明现象[34]，这是近年来广为讨论无粒子数反转光放大问题情形下，较早的关于原子状态相干介质光学特性的实验结果。

在强相干光场驱动下，钠原子蒸汽中的无粒子数反转光放大实验，采用钠原子基态的两个超精细结构 $F=1$ 和 $F=2$ 能级，作为两个相邻的能级 1 和 2，钠原子的 $3P_{3/2}$作为高能级 3，$3P_{1/2}$作为能级 4，如图 8-7-1 所示[35]。通过钠原子蒸汽的放电激发，将钠原子部分地激发到能级 3，强相干驱动光场 $\mathscr{E}_d$ 加在能级 4 与能级 1、2 之间，观测相应于能级 3 与能级 2、1 之间跃迁的波长在 589.0nm 附近的弱探测光 $\mathscr{E}_{pr}$的放大。

据发表的实验结果[35]，在没有相干驱动光场出现时，观测到的钠原子的 589.0nm 附近的吸收谱，如图 8-7-2 所示。当施加强的相干驱动光场 $\mathscr{E}_d$ 时，观测吸收光谱由负变到正，该系统出现放大作用，如图 8-7-3 所示。

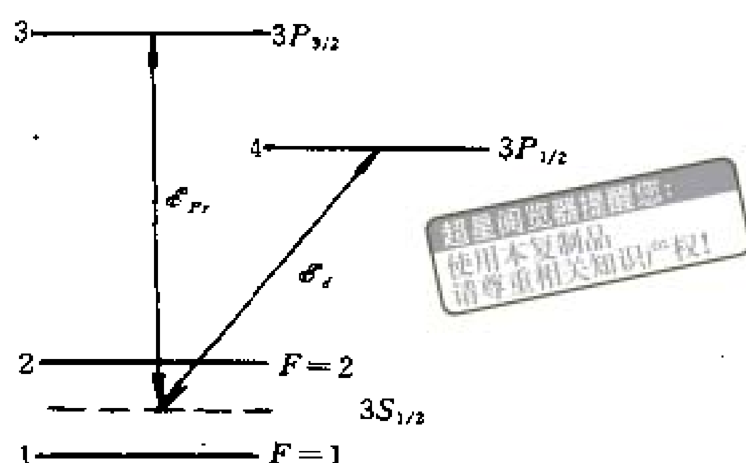


图 8-7-1 钠原子无粒子数反转放大能级图

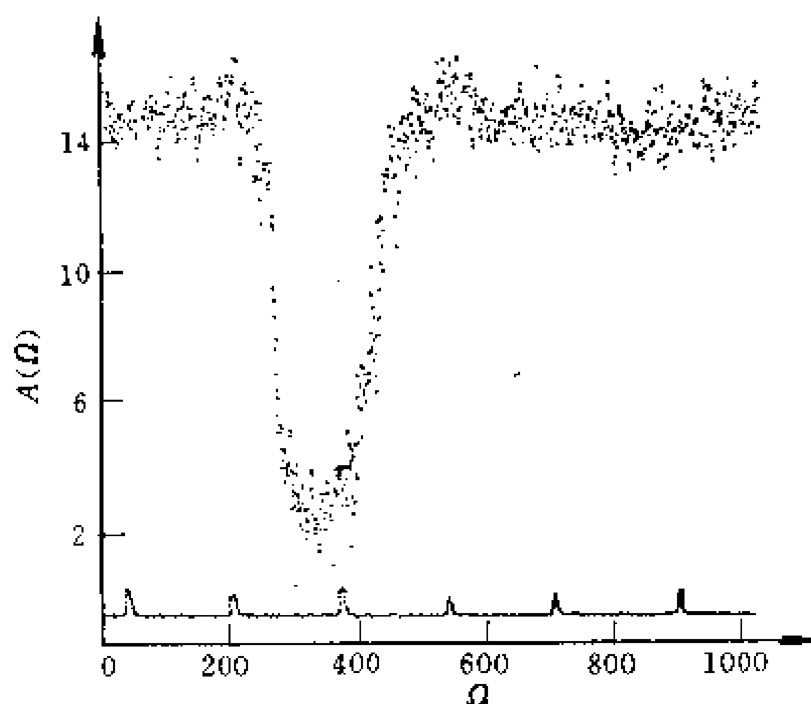


图 8-7-2 钠原子在 $\lambda=589.0\text{nm}$ 处的吸收谱

上述实验也可解释为能级 3 与缀饰态中最低的三个能态中的两个能级之间，形成粒子数反转分布，产生光的放大，如本章 § 8-5 节中所讨论的那样。

利用相干的俘获效应，在实验上曾在 Sm 蒸汽中观测到无粒子数反转光放大现象[36]。Sm 的基态超精细结构劈裂能级 $|1\rangle$、$|2\rangle$

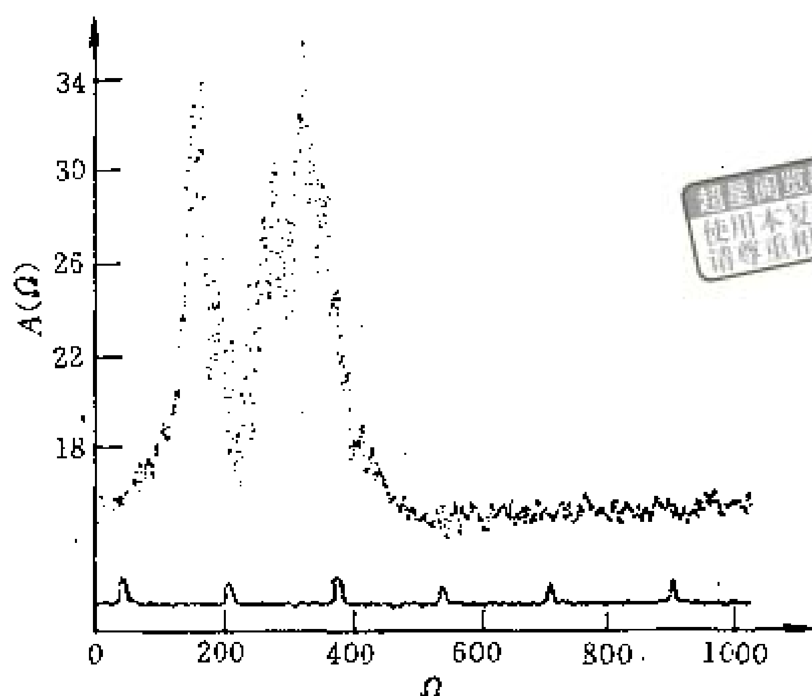


图 8-7-3 钠原子的无粒子数反转光放大

和$|3\rangle$及高能级$|4\rangle$，相应的量子数如图 8-7-4 所示。能级$|4\rangle$向下的跃迁分别为σ^+、π 和 σ^-。用电矢量平行于磁场方向的光作泵浦光，π 跃迁使能级$|4\rangle$部分地居集一定的粒子数。用电矢量垂直于

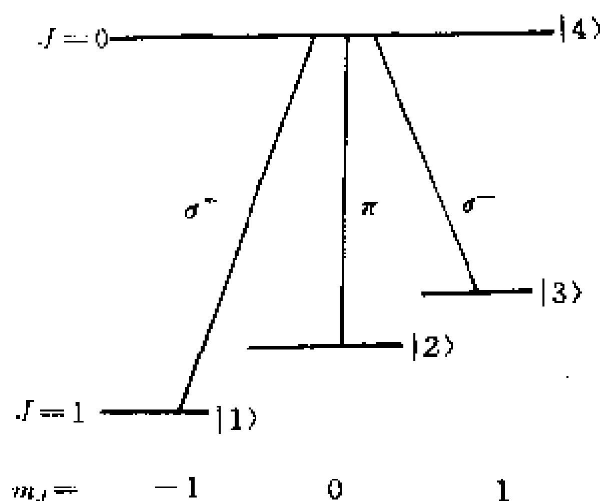


图 8-7-4 S_m 基态超精细结构

磁场方向的光，作为相干驱动光和探测光，前者使粒子数俘获在

$|1\rangle$和$|3\rangle$态的一个叠加态，从而实现无粒子数反转光放大。实验用皮秒光脉冲，严格分开探测光与强相干脉冲驱动光，测得一定的增益系数。

参考文献

[1] Marcuse D. Proc,IEEE,Vol 51,1963,849

[2] Holt H. Phys. Rev A. Vol 16,1976,1136

[3] 沈柯. 中国激光,No1. 1978,56;No2,1978,46

[4] Rautian S R and Sobelman I I. Sov. Phys. JETP, Vol 14, 1962,328

[5] Mollow. B. R. Phys. Rev, A,Vol 5,1972,221

[6] Wu F Y. et al. Phys Rev Letters, Vol 42,1977. 1077

[7] Arkhipkin V G and Heller Yu I. Phys. Letters. Vol 98 A, 1983,12

[8] Fano U. Phys Rev, Vol 124,1961,1866

[9] Harris S E. Phys. Rev Letters. Vol 62,1989,1033

[10] Harris S E and Macklin J J. Phys. Rev A. Vol 40,1989,4135

[11] Lyras Aet al. Phys. Rev, A, Vol 40,1989,4131

[12] Imamoǧvlu A. Phys Rev, A, Vol 40, 1989 2835

[13] Basile S and Lambropoulos P. Opt Comm,Vol 78, 1990,163

[14] Blok V R. et al. Phys Rev A. Vol 41, 1990, 1517

[15] Shi-Yao Zhu et al. Phys Rev A. Vol 43, 1991 5170

[16] Blok V R and Krochik G M. Phys Rev A. Vol 44, 1991,2036

[17] Blok V R. and Krochik G M. Phys Rev A,Vol 43,1991,5173

[18] Blok V R. et al. Opt comm, Vol 82,1991,309

[19] Shi-Yao Zhu and Fill E E. Phys Rev A. Vol 41, 1990, 4727

[20] Когаровская О А И Ханин. Я. И,ЖЭТФ Том90,1986,1610

[21] Когаровская О А И Ханин Я. И. письма, ЖЭТФ Том48 1988, 581
[22] Scully M O and Shi-Yao Zhu. Phys Rev, Letters. Vol 62, 1989, 2819
[23] Olga Kocharovskaya and Paul Mandel. Phys. Rev A. Vol 42, 1990, 523
[24] Fill E E. et al. Opt Comm. Vol 77,1990 36
[25] Narducci L M. et al. Opt. Comm, Vol 81, 1991, 379
[26] Narducci L M et al. Opt. Comm, Vol 86, 1991, 324
[27] Agarwal G S. Phys. Rev, A. Vol 42, 1990 686
[28] Krajwajczyk A et al. Phys Rev, A. Vol 45, 1992, 420
[29] Agarwal G S and Ravi S. Phys. Rev, A. Vol 41, 1990 4721
[30] Agarwal G S and Ravi S. Phys. Rev, A. Vol 41, 1990, 4727
[31] 沈元奠. 非线性光学原理(下册),科学出版社,1987,第22章
[32] Sagent Ⅲ M. Scully M O and Lamb Jr W E. Laser Physics, Addison-Wesley, 1974
[33] Heidi Fearn et al. Opt. Comm Vol 87, 1992, 323
[34] Boller K J. et al. Phys Rev Letters. Vol 66. 1991, 2591
[35] Jinyue Gao et al. Opt Comm, Vol 93,1992, 323
[36] Nattelman Aet al. Phys. Rev, Letter,Vol 70, 1993, 1783
[37] Gray H R. et al. Opt. Letters,Vol 3, 1978, 218
[38] Arimondo E and Orriois G. Nuovo Cimento. Letters, Vol 17,1976 333
[39] Alzetta G et al. Nuovo Cimento, B, Vol 36, 1976, 5
[40] 沈柯. 激光原理教程,北京工业学院出版社,1986,第3章

第九章　全量子理论

本章采用产生算符和湮没算符描写原子的电子和光场的光子的运动，研究在光与原子相互作用过程中热库的作用，从而建立光与二能级原子相互作用的朗之万方程和辐射场的密度矩阵方程；以密度矩阵的相干态表示建立光与原子相互作用的福克-普朗克方程。

§9-1　引　　言

结合具体量子光学现象的讨论，在前面各章已经建立了量子光学中一系列的基本方程组，它们分别属于光与原子相互作用的半经典理论和全量子理论。这些基本方程组，对进一步开拓和认识新的量子光学现象，将起到重要作用。

在半经典理论方面，已经建立的方程有布洛赫方程和麦克士威-布洛赫方程。这些方程都认为光场运动服从经典电磁场方程；在对于原子运动的描写上，在布洛赫方程建立过程中，使用赝自旋算符，而在麦克士威-布洛赫方程建立过程中，使用的是原子的密度矩阵或波函数。

平均场理论方程实际上是从光与原子相互作用的全量子理论出发建立的，采用量子化的光场，对于原子使用赝自旋算符，纳入量子力学中的算符运动方程进行讨论。平均场理论方程组(2-4-39)—(2-4-41)式，是采用光场矢势 A 的算符形式得到的，而(4-2-18)—(4-2-20)式是直接采用光场的电场强度的算符形式得到的。这两种形式，在物理上是一致的。

哈肯在60到70年代，在研究光与原子相互作用问题时，发展了一套全量子理论，虽然当时大部分研究的是激光器问题，但是在理论体系上和处理方法上以及一些基本方程，在讨论量子光学中的光与原子相互作用问题中，已为人们广为采用。本章着重介绍哈肯的全量子理论。

§9-2 无损耗和无起伏的系统

首先讨论光与原子系统相互作用过程中，与周围环境媒质无相互作用情形，即研究无损耗和无起伏情形。

在第二章第四节曾讨论过光场与原子组成的总系统中的原子的电子，它的波函数在二次量子化时成为算符，所以可以用原子的电子的产生算符 a^+ 和湮没算符 a 描写电子的运动，如(2-4-52)和(2-4-53)式所示。原子的电子算符 a^+ 和 a 的对易关系，服从(2-4-54)—(2-4-56)式。在均匀加宽情形，N 个二能级原子的哈密顿算符如(2-4-58)式所示。

对于光与原子组成的总系统中的光场，用光子的产生算符 b^+ 和湮没算符 b 表示，用它们表示的光场的矢势算符 $\hat{A}$ 和电场强度算符，分别如第一章的(1-7-39)和(1-7-40)式所示。自由辐射场的哈密顿算符为

$$H_L = \sum_l \hbar\omega_l b_l^+ b_l \tag{9-2-1}$$

对于单模光场，哈密顿算符为

$$H_L = \hbar\omega b^+ b \tag{9-2-2}$$

光辐射场与原子的电子波场相互作用哈密顿算符 H_i，由(2-4-61)式表示。将(2-4-52)和(2-4-53)式以及(1-7-39)式代入(2-5-61)式，得到相互作用哈密顿算符为

$$H_i = -\frac{e}{mc}\sum_{i,j,l}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0 V}}(b_l^+ + b_l)\int\psi_i^* \boldsymbol{u}_l \cdot \boldsymbol{p}\psi_j \mathrm{d}v a_i^+ a_j \tag{9-2-3}$$

上式是光辐射场与一个原子的相互作用哈密顿算符，实际上有 N 个原子，因此上式还要对原子数目 n 求和。这样，(9-2-3)式为

$$H_i = -\frac{e}{mc}\sum_{i,j,n,l}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0 V}}(b_l^+ + b_l)\int\psi_{i,n}^* \boldsymbol{u}_l \cdot \boldsymbol{p}\psi_{i,n} \mathrm{d}v a_{i,n}^+ a_{j,n} \tag{9-2-4}$$

光场与原子系统的总哈密顿算符为

$$H = H_{el} + H_L + H_i \tag{9-2-5}$$

现在建立光场与原子相互作用时，在海森伯表象中光场的光子和原子的电子算符的运动方程。为此将(2-4-58)、(9-2-1)、(9-2-4)式代入(9-2-5)式，然后将它们代入描写算符运动的海森伯方程中，根据玻色子算符对易关系和弗米子算符对易关系进行运算，则可得到光子的算符运动方程和原子的电子算符运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b_l^+ = \mathrm{i}\omega_l b_l^+ + \mathrm{i}\sum_{i,j,n,}g_{i,j,n,l}a_{i,n}^+ a_{j,n} \tag{9-2-6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_{i'}^+ a_{j'})_n = &\mathrm{i}\nu_{i',j'}(a_{i'}^+ a_{j'})_n + \mathrm{i}\sum_{i,j,l}g_{i,j,n,l}(b_l^+ + b_l) \\ &\times[(a_{i'}^+ a_{j'})_n\delta_{j,i'} - (a_{i'}^+ a_j)_n\delta_{i,j'}]\end{aligned} \tag{9-2-7}$$

上式中耦合系数 $g_{i,j,n,l}$ 为

$$g_{i,j,n,l} = -\frac{e}{\hbar mc}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\varepsilon_0 V}}\int\psi_{i,n}^* \boldsymbol{U}_l \cdot \boldsymbol{p}\psi_{i,n}\mathrm{d}v \tag{9-2-8}$$

$\nu_{i,j}$ 表示由玻尔频率定则决定的能级 i 和 j 之间的跃迁相应的频率。对于二能级原子，将 i 和 j 只取值 1 和 2，取旋波近似，并令

$$\sigma^+ = a_2^+ a_1 \tag{9-2-9}$$

$$\sigma^- = a_1^+ a_2 \tag{9-2-10}$$

$$\sigma = a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1 \tag{9-2-11}$$

由(9-2-7)式得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_n^+ = -\mathrm{i}\nu_{1,2}\sigma_n^+ - \mathrm{i}\sum_l g_{1,2,n,l} b_l^+ \sigma_n \tag{9-2-12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_n^- = \mathrm{i}\nu_{12}\sigma_n^- + \mathrm{i}\sum_l g_{2,1,n,l} b_l \sigma_n \tag{9-2-13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_n = 2\mathrm{i}\sum_l \left[g_{1,2,n,l} b_l^+ \sigma_n^- - g_{2,1,n,l} b_l \sigma_n^+\right] \tag{9-2-14}$$

因为 $g_{2,1,n,l}=g_{1,2,n,l}^*$，所以(9-2-12)和(9-2-13)式互为共轭。由(9-2-6)式得到二能级原子与光场相互作用时，光子的算符方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b_l^+ = \mathrm{i}\omega_l b_l^+ + \mathrm{i}\sum_n g_{2,1,n,l}\sigma_n^+ \tag{9-2-15}$$

以上是在理想情形下，光与二能级原子相互作用时的算符方程。

§9-3 朗之万方程

上一节是对封闭系统进行的讨论，实际上在光与原子相互作用时，与周围媒质交换能量，为此应引入阻尼项或损耗项。现以光辐射场为例说明。

对于单模自由辐射场，将(9-2-2)式代入描写算符运动的海森伯方程，使用光子产生算符和湮没算符的对易关系，得到算符 b_l 和 b_l^+ 的方程为

$$\frac{\mathrm{d}b_l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_L, b_l] = -\mathrm{i}\omega_l b_l \tag{9-3-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}b_l^+}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_L, b_l^+] = \mathrm{i}\omega_l b_l^+ \tag{9-3-2}$$

表明 b_l 和 b_l^+ 服从谐振子运动方程。当考虑到光场与外界交换能量时，上述方程应为有阻尼的谐振子方程。为此引入光场的阻尼系数 κ_l，方程(9-3-1)和(9-3-2)式应为

$$\frac{\mathrm{d}b_l}{\mathrm{d}t} = (-\mathrm{i}\omega_l - \kappa_l)b_l \tag{9-3-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}b_l^+}{\mathrm{d}t} = (\mathrm{i}\omega_l - \kappa_l)b_l^+ \tag{9-3-4}$$

容易看出这样引入阻尼系数之后，会使算符 b_l 和 b_l^+ 不满足下列的对易关系

$$\begin{aligned} &[b_l, b_p^+] = b_l b_p^+ - b_p^+ b_l = \delta_{lp} \\ &[b_l, b_p] = 0 \\ &[b_l^+, b_p^+] = 0 \end{aligned} \tag{9-3-5}$$

因为如设 $t=0$ 时，$b_l = b_{l0}$，由(9-3-3)—(9-3-5)式解出

$$[b_l, b_l^+] = [b_l, b_l^+]_0 \mathrm{e}^{-2\kappa_l t} \tag{9-3-6}$$

由初始值

$$[b_l, b_l^+] = 1 \tag{9-3-7}$$

得到

$$[b_l, b_l^+] = \mathrm{e}^{-2\kappa_l t} \tag{9-3-8}$$

可见，当 $t>0$ 时，对易关系(9-3-5)式不被满足。为了满足对易关系，事实上还应在(9-3-3)和(9-3-4)式中引进无规力 F_l 和 F_l^+。

现在讨论无规力的引入问题。人们知道，N 个二能级原子与光辐射场相互作用时，同时发生光场被杂质吸收、散射或衍射造成的损耗；发生原子之间的碰撞或者晶格振动造成原子运动状态的变化，还有衰减模式的相互作用等。所有这些作用可归并为光场和 N 个二能级原子系统与一个热库的相互作用，如图 9-3-1 所示。这种作用自由度很大，而且是无规的。

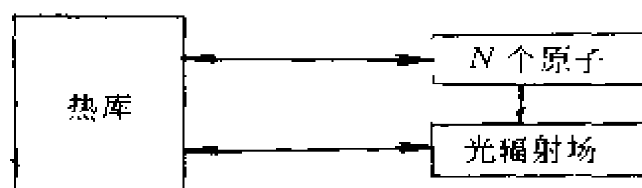


图 9-3-1　热库的作用

关于无规运动问题，布朗运动是人们所熟悉的。统计物理学认为布朗运动是微观分子的宏观表象，观测到的布朗粒子的位移是一种剩余的涨落。描写布朗运动的是朗之万方程。一个布朗粒子所受的力，有向下的重力和周围分子的作用力。周围分子的作用是通过碰撞实现的，它们是向上的浮力和与粒子运动速度相反的阻力$-\alpha v$，还有涨落很快引起粒子无规运动的无规力$F(X,Y,Z)$。若只考虑粒子的运动在水平面上x方向的投影，则重力与浮力不出现，运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X \tag{9-3-9}$$

式中m是粒子的质量，α是阻尼系数。对于多个自由度，可引入物理量$u=(u_1(\tau)\cdots,u_n(\tau))$，则有

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\sum_k M_{ik}(u_1\cdots\cdots u_n)u_k+F_i(t) \tag{9-3-10}$$

式中M_{ik}描写阻尼过程或驰豫过程，无规力$F_i(t)$具有马尔科夫(Markoff)性质

$$\langle F_i(t)F_k(t)\rangle=G_{ik}\delta(t-t') \tag{9-3-11}$$

马尔科夫过程的特点是所讨论的体系是t时的变量，只与体系在t时情况有关，与体系的历史无关。在光与物质相互作用的很多问题中，热库的“记忆”非常短于系统的其它时间常数。

根据上述讨论，在(9-3-3)和(9-3-4)式中应引进无规力F_l和F_l^+，借助热库模型，可以给出无规力的量子力学表示式。设$B_\omega^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$为热库的算符，则热库的场能算符$H_B$为

$$H_B=\sum\hbar\omega B_\omega^+B_\omega \tag{9-3-12}$$

热库与光辐射场的相互作用哈密顿算符H_{L-B}为

$$H_{L-B}=\hbar b^+\sum g_\omega B_\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\hbar b\sum g_\omega^*B_\omega^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{9-4-13}$$

光辐射场与热库的总哈密顿算符为

$$H=H_L+H_B+H_{L-B}$$

$$= \sum_l \hbar\omega_l b_l^+ b_l + \sum_\omega \hbar\omega B_\omega^+ B_\omega + \sum_{l,\omega} \hbar b_l^+ g_{\omega,l} B_\omega e^{-i\omega t}$$

$$+ \sum_{l,\omega} b_l^* g_{\omega,l} B_\omega^+ e^{i\omega t} \tag{9-3-14}$$

使用上式，由海森伯算符运动方程，直接得到

$$\frac{db_l^+}{dt} = i\omega_l b_l^+ + i\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^+ e^{i\omega t} \tag{9-3-15}$$

$$\frac{dB_\omega}{dt} = i b_l^+ g_\omega e^{-i\omega t} \tag{9-3-16}$$

(9-3-15)式给出的用热库算符 B_ω^+ 表示的无规力为

$$F^+(t) = i\sum_\omega g_\omega^+ B_\omega^+ e^{i\omega t} \tag{9-3-17}$$

考虑到无规力，(9-3-3)和(9-3-4)式为

$$\frac{db_l^+}{dt} = i\omega b_l^+ - \kappa_e b_l^+ + F_l^+(t) \tag{9-3-18}$$

$$\frac{db_l}{dt} = -i\omega b_l - \kappa_e b_l + F_l(t) \tag{9-3-19}$$

$$\langle [F_l(t), F_l^+(t')] \rangle_B = 2\kappa_l \delta(t - t') \tag{9-3-20}$$

当将$[b_l, b_l^*]$对无规力求平均$\langle [b_l, b_l^*] \rangle$，并使用(9-3-18)—(9-3-20)式，可得到

$$\frac{d}{dt}\langle [b_l, b_l^+] \rangle_B = 2\kappa_l \{1 - \langle [b_l, b_l^+] \rangle_B\} \tag{9-3-21}$$

通解为

$$\langle [b_l, b_l^+] \rangle_{B,t} = A e^{-2\kappa_l t} + 1 \tag{9-3-22}$$

由初始条件

$$\langle [b_l, b_l^+] \rangle_{B,0} = 1 \tag{9-3-33}$$

得到积分常数 $A=0$，所以 b_e 和 b_e^+ 满足对易关系。

对于原子的电子运动，也要进行类似的讨论，即在方程中应引进弛豫项，同时在 σ^+ 和 σ^- 中应分别引进无规力 Γ_{21} 和 Γ_{12}。

根据(9-2-15)式和(9-3-18)(9-3-19)式，并在(9-2-12)—(9-2-

14)式中分别引进弛豫项和无规力，最后得到二能级原子与光辐射场相互作用的朗之万方程如下

$$\frac{db_l^+}{dt}=(i\omega_l-\kappa_l)b_l^+ + \sum_n g_{n,l}^*\sigma_n^+ + F_l^+(t) \tag{9-3-24}$$

$$\frac{db_l}{dt}=(-i\omega_l-\kappa_l)b_l + \sum_n g_{n,l}\sigma_n^- + F_l(t) \tag{9-3-25}$$

$$\frac{d\sigma_n^+}{dt}=(i\omega_l-\nu)\sigma_n^+ - i\sum_l g_{n,l}b_l^+\sigma_n + \Gamma_{21,n}(t) \tag{9-3-26}$$

$$\frac{d\sigma_n^-}{dt}=(-i\omega_l-\nu)\sigma_n^- + i\sum_l g_{n,l}^* b_l\sigma_n + \Gamma_{12,n}(t) \tag{9-3-27}$$

$$\frac{d\sigma_n}{dt}=\frac{\sigma_0-\sigma_n}{T'} + 2i\sum_l[g_{n,l}\sigma_n^- b_l^+ - g_{n,l}^*\sigma_n^+ b_l] + \Gamma_{\sigma,n} \tag{9-3-28}$$

式中 ν 为横向弛豫速率，T' 为纵向弛豫时间，σ_0 为热平衡时能级 2 与 1 上的粒子数差，$\Gamma_\sigma=\Gamma_{22}-\Gamma_{11}$，$\Gamma_{22}$和 Γ_{11}分别为能级 2 和能级 1 的粒子数方程的无规力。

§ 9-4 福克-普朗克方程

布朗粒子运动，粒子离开原处发生迁移，可认为是扩散现象，在经典统计物理学中，已经证明，位移的几率分布函数和粒子的数密度，都满足扩散方程。已知初始条件和边界条件，可从扩散方程解得分布函数。(9-3-10)式中的 u_i 是随时间起伏变化的函数，u_i 随时间的分布可用无规分布函数 $f(u,t)$描写，$f(u,t)$服从福克-普朗克方程

$$\frac{\partial f(u,t)}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial}{\partial u_i}[B_i(u)f(u,t)] - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2[Q_{i,j}(u)f(u,t)]}{\partial u_i\partial u_j}=0 \tag{9-4-1}$$

式中 B_i 和 $Q_{i,j}$ 是与(9-3-10)式中的 M 及无规力有关的系数。

通过密度矩阵运动方程的相干态表示，可以建立量子光学中的福克-普朗克方程，用以计算光与原子相互作用时各种期待值的时间变化率。设光与原子相互作用的总系统的密度矩阵为 ρ_{AL}，其中原子的密度矩阵为 ρ_A，光场的密度矩阵为 ρ_L，由约化算符的性质，光场的密度矩阵 ρ_L 可由下式求出

$$\rho_L(t) = T_{rA}\{\rho_{AL}(t)\} \tag{9-4-2}$$

光与原子相互作用哈密顿算符为

$$H_{AL} = \hbar g r^+ b^+ + \text{adjoint} = \hbar g\begin{pmatrix} 0 & b \\ b^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{9-4-3}$$

式中 r^+ 表示二能级原子的上升算符，adjoint 表示伴随项。在相互作用表象，ρ_{AL} 的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{AL}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_{AL}, \rho_{AL}(t)] \tag{9-4-4}$$

设初始时刻 $t=0$ 时，光与原子系统无关，则有

$$\rho_{AL}(t) = \rho_L(t) \otimes \rho_A(t) \tag{9-4-5}$$

式中 $\otimes$ 符号表示外积。解方程(9-4-4)式，求到二级近似，并用 $\rho(t+\tau)$ 表示 $\rho_L(t+\tau)$，得到光场的密度矩阵为

$$\rho(t+\tau) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(t) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau T_{r_A}[H_{AL}, \rho_{AL}(t)]$$

$$-\rho\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\hbar}\right)^2 T_{r_A}[H_{AL}, [H_{AL}, \rho_{AL}(t)]] \tag{9-4-6}$$

对于二能级原子，初始条件为

$$\rho_{AL}(t) = \rho(t) \otimes \begin{pmatrix} \rho_{22} & 0 \\ 0 & \rho_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{22}\rho(t) & 0 \\ 0 & \rho_{11}\rho(t) \end{pmatrix} \tag{9-4-7}$$

将 H_{AL} 表示式(9-4-3)代入(9-4-6)式使用上述初始条件，得到

$$\begin{aligned}\rho(t+\tau) \simeq \rho(t) - \frac{1}{2}g^2\tau^2[(bb^+\rho - b^+\rho b)\rho_{aa} \\ + (b^+b\rho - b\rho b^+)\rho_{bb} + \text{adjoint})]\end{aligned} \tag{9-4-8}$$

设 R 为单位时间的原子注入率，$\rho(t)$ 的粗粒速率表示为

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = R[\rho(t+\tau) - \rho(t)] \tag{9-4-9}$$

则由(9-4-8)式得到

$$\begin{aligned}\frac{d\rho(t)}{dt} = & -\frac{1}{2}R_a[bb^+\rho - b^+\rho b] \\ & -\frac{1}{2}R_b[b^+b\rho - b\rho b^+] + \text{adjoint}\end{aligned} \tag{9-4-10}$$

式中 R_a 和 R_b 分别为

$$\begin{aligned}R_a &= R\rho_{aa}g^2\tau^2 \\ R_b &= R\rho_{bb}g^2\tau^2\end{aligned} \tag{9-4-11}$$

现在研究(9-4-10)式的相干态表示。用相干态$|\alpha\rangle$的几率密度$\rho(\alpha)$可将$\rho(t)$表示为

$$\rho(t) = \int d^2\alpha P(\alpha,t)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{9-4-12}$$

这样，(9-4-10)式可表示为

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dt}P(\alpha,t)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = & -\frac{1}{2}\int P(\alpha,t)\{R_a[bb^+|\alpha\rangle\langle\alpha| \\ & - b^+|\alpha\rangle\langle\alpha|b + R_b[b^+b|\alpha\rangle\langle\alpha| \\ & - b|\alpha\rangle\langle\alpha|b^+]\}d^2\alpha + \text{adj}\end{aligned} \tag{9-4-13}$$

经逐项计算上式右端各项，得到

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dt}P(\alpha,t)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = & -\int\left\{\mathscr{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha P(\alpha,t) + \text{C.C} \right. \\ & \left. - \mathscr{A}\frac{\partial^2 P(\alpha,t)}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\right\}|\alpha\rangle\langle\alpha|\Big]d^2\alpha\end{aligned} \tag{9-4-14}$$

式中的 $\mathscr{B}=(R_a-R_b)/2$，$\mathscr{A}=R_a$。在得到上式过程中，使用了以下计算结果：根据相干态函数性质，可以得到以下表达式

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{-\alpha\alpha^*}e^{b\alpha^+}|0\rangle\langle 0| \tag{9-4-15}$$

使用上式可将(9-4-13)式右端的项变为

$$b^{+}b|\alpha\rangle\langle\alpha| - b|\alpha\rangle\langle\alpha|b^{+} = \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{9-4-16}$$

$$bb^{+}|\alpha\rangle\langle\alpha| - b^{+}|\alpha\rangle\langle\alpha|b = -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{9-4-17}$$

关于含有 $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$项的积分为

$$\int P\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^2\alpha = -\int\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha P)|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^2\alpha \tag{9-4-18}$$

此处认为在无穷积分限处 $P(\alpha,t)$为零。同样求出含有 $\partial^2/\partial\alpha\partial\alpha^*$ 项的积分。

最后比较(9-4-14)式中$|\alpha\rangle\langle\alpha|$的系数，得到量子光学中的福克-普朗克方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\alpha,t) + \mathscr{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha P(\alpha,t) + \mathrm{C.C}] - \mathscr{A}\frac{\partial^2 P(\alpha,t)}{\partial\alpha\partial\alpha^*} = 0 \tag{9-4-19}$$

采用同样的方法，可以建立以原子状态相干为原理的无粒子数反转光放大系统的福克-普朗克方程，并用以讨论这种系统的特性[3]。

§9-5 密度矩阵方程

密度矩阵也是研究热库与光辐射场相互作用的一种有效方法。对于光辐射场与热库构成的系统，用二极微扰理论，可以得到辐射场的密度矩阵方程。设系统的密度矩阵为 ρ，它的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\rho] \tag{9-5-1}$$

上式中的哈密顿算符为

$$H = H_0 + H_{LB} \tag{9-5-2}$$

$$H_0 = H_L + H_B \tag{9-5-3}$$

$$H_B = \sum_j H_B^{(j)} \qquad (9\text{-}5\text{-}4)$$

即总的热库算符可表示为几个热库的哈密顿算符之和。光辐射场与热库相互作用哈密顿算符 H_{LB}可表示为

$$H_{LB} = B_1V_1 + B_2V_2 \qquad (9\text{-}5\text{-}5)$$

上式中的 V_1, V_2, B_1 和 B_2 分别表示

$$\begin{aligned} V_1 &= be^{-i\omega t} \\ V_2 &= b^+ e^{i\omega t} \\ B_1 &= B^+ (t) \\ B_2 &= B(t) \\ B &= \hbar \sum_\omega g_\omega B_\omega \end{aligned} \qquad (9\text{-}5\text{-}6)$$

设
$$V_m(t) = V_m(0)e^{i\Delta\omega_m t} \qquad (9\text{-}5\text{-}7)$$

用微扰理论在相互作用表象求解(9-5-1)式，计算到二级近似，得到

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} = \rho_0 &- \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt[\tilde{H}_{LB}, \rho_0] \\ &+ \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt''\int_0^{t''} dt' \{\tilde{H}_{LB}(t''), [\tilde{H}_{LB}(t'), \rho_0]\}\end{aligned} \qquad (9\text{-}5\text{-}8)$$

ρ_0 是 $t=0$ 时的系统密度矩阵，$\tilde{\rho}$ 和 $\tilde{H}_{LB}$是 ρ 和 H_{LB}在相互作用表象的表示式

$$\tilde{\rho} = e^{iH_0t/\hbar}\rho e^{-iH_0t/\hbar} \qquad (9\text{-}5\text{-}9)$$

$$\tilde{H}_{LB} = e^{iH_0t/\hbar}H_{LB}e^{-iH_0t/\hbar} \qquad (9\text{-}5\text{-}10)$$

将(9-5-8)式对热库取平均，设对热库变量取平均为零，即 $\overline{B}=0$。这里仍然使用 $\tilde{\rho}$ 表示系统对热库变量平均的密度矩阵，即 $\overline{\tilde{\rho}}=\tilde{\rho}$，则由(9-5-8)式得到对热库取平均后的密度矩阵方程为

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt''\int_0^{t''} dt' \sum_{m,m'}\{V_m(t'')B_m(t''), [V_{m'}(t_1)B_{m'}(t), \rho_0]\} \qquad (9\text{-}5\text{-}11)$$

假设热库有短的记忆，即设

$$\overline{B(t'')B(t')} \sim \delta(t''-t') \tag{9-5-12}$$

这样，(9-5-11)式中的双重积分可近似为积分和 t 的乘积，将 $\tilde{\rho}_0$ 移至左端，两端用 t 除，当 t 很小时，则有

$$\frac{\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_0}{t}=\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}}{\mathrm{d}t} \tag{9-5-13}$$

最后(9-5-11)式为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{m,m'}\{[V_{m'}\tilde{\rho}(t),V_m]D_{mm'}+[V_{m'},\tilde{\rho}(t)V_m]D'_{mm'}\} \tag{9-5-14}$$

式中 D 和 D' 是含有热库变量的相关函数，将(9-5-6)式中的 V_1 和 V_2 代入，只讨论 m,m' 项，$\Delta\nu_m=\Delta\nu_{m'}$，用 δ 和 ξ 代表 D 和 D'，由(9-5-14)式得到光辐射场的密度矩阵方程为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\{[b^+\rho,b]+[b^+,\rho b]\}\delta+\{[b\rho,b^+]+[b,\rho b^+]\}\xi \tag{9-5-15}$$

同样可以讨论二能级原子的电子与热库作用时的密度矩阵方程。原子的电子与热库作用的哈密顿算符为

$$\begin{aligned}H_{LB}&=B_{21}(t)a_2^+a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}+B_{12}(t)a_1^+a_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\\&=B_1V_1+B_2V_2\end{aligned} \tag{9-5-16}$$

利用二级微扰理论，进行类似的讨论，并考虑到上式中的 $V_1=a_2^+a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}$，$V_2=a_1^+a_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}$，可以得到二能级原子的电子与热库作用的密度矩阵方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}}{\mathrm{d}t}&=\frac{W_{21}}{2}\{[a_1^+a_2,\tilde{\rho}a_2^+a_1]+[a_1^+a_2\tilde{\rho},a_2^+a_1]\}\\&\quad+\frac{W_{12}}{2}\{[a_2^+a_1,\tilde{\rho}a_1^+a_2]+[a_2^+a_1\tilde{\rho},a_1^+a_2]\}\end{aligned} \tag{9-5-17}$$

式中 W_{21} 和 W_{12} 事实上代表原子的跃迁速率。

[1] Haken H. "Laser Theory" ,Springer-Ve[illegible]elberg, 1984

[2] Sagent Ⅲ, M Scully M O Lamb Jr, W,E. "Laser Physics", Addison-Wesley, 1974

[3] Shi-Yao Zhu. Phys. Rev. A. Vol 42, 1990, 5537